7

Similitud

7.1 RAZONES

Las *razones* se utilizan para comparar cantidades por medio de la división: la razón de dos cantidades es la primera dividida entre la segunda. Una razón es un número abstracto, es decir, un número sin unidad de medida. Por lo tanto, la razón de 10 pies a 5 pies es 10 pies ÷ 5 pies, lo cual es igual a 2.

Una razón puede expresarse de las siguientes maneras: (1) por medio del signo de ":", como en 3:4; (2) si se emplea "a" como en 3 a 4; (3) como una fracción común, igual que en $\frac{3}{4}$; (4) como un número decimal, 0.75; y (5) como un porcentaje, 75%.

Las cantidades involucradas en una razón deben tener la misma unidad. Una razón debe simplificarse reduciéndola a sus términos menores y eliminando fracciones. Para calcular la razón entre 1 pie y 4 pulgadas, primero se convierte el pie a 12 pulgadas, y luego se toma la razón de 12 pulgadas a 4 pulgadas; el resultado es una razón de 3 a 1, o 3. Asimismo, la razón de $2\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$ sería reexpresada como 5:1 o 5.

La razón de tres o más cantidades puede expresarse como una *razón continua*. Por lo tanto la razón de \$2 a \$3 a \$5 es la razón continua 2:3:5. Esta razón aumentada es una combinación de tres razones separadas; éstas son 2:3, 3:5, y 2:5.

PROBLEMAS RESUELTOS

7.1 Razón entre Dos Cantidades con la Misma Unidad

Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (*a*) 15° a 3°; (*b*) \$1.25 a \$5; (*c*) $2\frac{1}{2}$ años a 2 años.

Soluciones

(*a*) $\frac{15}{3} = 5$ (*b*) $\frac{1.25}{5}$ (*c*) $\frac{2\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$

7.2 Razón entre Dos Cantidades con Diferente Unidad

Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (*a*) 2 años a 3 meses; (*b*) 80 centavos a \$3.20.

Soluciones

(*a*) 2 años a 3 meses = 24 a 3 meses = $\frac{24}{3} = 8$

(*b*) 80 centavos a \$3.20 = 80 centavos a 320 centavos = $\frac{80}{320} = \frac{1}{4}$

7.3 Razón Continua entre Tres Cantidades

Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (*a*) 1 galón a 2 cuartos a 2 pintas; (*b*) 1 tonelada a 1 libra a 8 onzas.

Soluciones

(*a*) 1 galón a 2 cuartos a 2 pintas = 4 cuartos a 2 cuartos a 1 cuarto = 4:2:1.

(*b*) 1 tonelada a 1 libra a 8 onzas = 2 000 libras a 1 libra a $\frac{1}{2}$ libra = 2 000:1:$\frac{1}{2}$ = 4 000:2:1.

7.4 Razones Numéricas y Algebraicas

Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (*a*) 50 a 60; (*b*) 6.3 a 0.9; (*c*) 12 a $\frac{3}{8}$; (*d*) $2x$ a $5x$; (*e*) $5s^2$ a s^3; (*f*) x a $5x$ a $7x$.

Soluciones

(*a*) $\dfrac{50}{60} = \dfrac{5}{6}$ (*d*) $\dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$

(*b*) $\dfrac{6.3}{0.9} = 7$ (*e*) $\dfrac{5s^2}{s^3} = \dfrac{5}{s}$

(*c*) $12 \div \dfrac{3}{8} = 32$ (*f*) $x:5x:7x = 1:5:7$

7.5 Uso de Razones en Problemas de Ángulos

Si dos ángulos están en la razón de 3:2, calcule los ángulos si (*a*) son adyacentes y forman un ángulo que mide 40°; (*b*) son ángulos agudos de un triángulo rectángulo; (*c*) son dos ángulos de un triángulo cuyo tercer ángulo mide 70°.

Soluciones

Sea la medida de los ángulos $3x$ y $2x$. Entonces:

(*a*) $3x + 2x = 40$, de aquí que $5x = 40$ o $x = 8$; por lo que los ángulos miden 24° y 16°.

(*b*) $3x + 2x = 90$, de aquí que $5x = 90$ o $x = 18$; por lo que los ángulos miden 54° y 36°.

(*c*) $3x + 2x + 70 = 180$, de aquí que $5x = 110$ o $x = 22$; por lo que los ángulos miden 66° y 44°.

7.6 Tres Ángulos que tienen una Razón Fija

Tres ángulos están en la razón de 4:3:2. Calcule los ángulos si (*a*) el primero y el tercero son suplementarios; (*b*) los ángulos son los tres ángulos de un triángulo.

Soluciones

Sea la medida de los ángulos $4x$, $3x$ y $2x$. Entonces:

(*a*) $4x + 2x = 180$, de aquí que $6x = 180$ o $x = 30$; por lo que los ángulos miden 120°, 90° y 60°.

(*b*) $4x + 3x + 2x = 180$, de aquí que $9x = 180$ o $x = 20$; por lo que los ángulos miden 80°, 60° y 40°.

7.2 PROPORCIONES

Una *proporción* es una igualdad de dos razones. Así, 2:5 = 4:10 (o $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$) es una proporción.

El cuarto término de una proporción es la *cuarta proporcional* a los otros tres tomados en orden. Así, en 2:3 = 4:x, x es la cuarta proporcional a 2, 3, y 4.

Los *medios* de una proporción son sus términos intermedios, esto es, su segundo y tercer términos. Los *extremos* de una proporción son sus términos externos, esto es, su primer y cuarto términos. Por lo tanto, en $a:b = c:d$, los medios son b y c, y los extremos son a y d.

Si los dos medios de una proporción son iguales, cualquier medio es la media proporcional entre el primero y el cuarto términos. Así, en $9:3 = 3:1$, 3 es la media proporcional entre 9 y 1.

7.2A Principios sobre proporciones

Principio 1: *en cualquier proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.*

De este modo, si $a:b = c:d$, entonces $ad = bc$.

Principio 2: *si el producto de dos números es igual al producto de otros dos números, cualquier par puede ocupar los medios de una proporción y el otro par ocupa los extremos.*

Si $3x = 5y$, entonces $x:y = 5:3$ o $3:y = 5:x$ o $5:x = 3:y$.

7.2B Métodos para convertir una proporción en una proporción equivalente

Principio 3: (método de inversión) *una proporción puede convertirse en una proporción equivalente si se invierte cada una de las razones.*

De este modo, si $\frac{1}{x} = \frac{4}{5}$, entonces $\frac{x}{1} = \frac{5}{4}$.

Principio 4: (método de alternación) *una proporción puede convertirse en una proporción equivalente si se intercambian los medios o los extremos.*

Así, si $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$, entonces $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ o $\frac{2}{3} = \frac{y}{x}$.

Principio 5: (método de adición) *una proporción puede convertirse en una proporción equivalente si se adicionan términos en cada una de las razones para obtener nuevos términos primero y tercero.*

Por lo tanto, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. Si $\frac{x-2}{2} = \frac{9}{1}$, entonces $\frac{x}{2} = \frac{10}{1}$.

Principio 6: (método de sustracción) *una proporción puede convertirse en una proporción equivalente al sustraer términos en cada una de las razones, para obtener nuevos términos primero y tercero.*

Así, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$. Si $\frac{x+3}{3} = \frac{9}{1}$, entonces $\frac{x}{3} = \frac{8}{1}$.

7.2C Otros principios sobre proporciones

Principio 7: *si tres términos de una proporción son iguales a tres términos de otra proporción, los términos restantes son iguales.*

De este modo, si $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ y $\frac{x}{4} = \frac{3}{5}$, entonces $y = 4$.

$5x = 3y$ $\quad x = \frac{12}{5}$ $\quad \frac{12}{5} = \frac{3y}{5}$

$x = \frac{3y}{5}$

$y = 4$ //.

Principio 8: *en una serie de razones iguales, la suma de cualquiera de los numeradores es a la suma de sus denominadores correspondientes, como cualquier numerador a su denominador.*

Así, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, entonces $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$. Si $\frac{x-y}{4} = \frac{x-3}{5} = \frac{3}{1}$, entonces $\frac{x-y+y-3+3}{4+5+1} = \frac{3}{1}$ o $\frac{x}{10} = \frac{3}{1}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

7.7 Cálculo de Incógnitas en las Proporciones

Resuelva las siguientes proporciones para x:

(*a*) $x:4 = 6:8$ (*c*) $x:5 = 2x:(x + 3)$ (*e*) $\dfrac{x}{2x - 3} = \dfrac{3}{5}$

(*b*) $3:x = x:27$ (*d*) $\dfrac{3}{x} = \dfrac{2}{5}$ (*f*) $\dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{7}{x + 2}$

Soluciones

(*a*) Como $4(6) = 8x$, $8x = 24$ o $x = 3$.

(*b*) Como $x^2 = 3(27)$, $x^2 = 81$ o $x = \pm 9$.

(*c*) Como $5(2x) = x(x + 3)$, se tiene $10x = x^2 + 3x$. Entonces $x^2 - 7x = 0$, de modo que $x = 0$ o 7.

(*d*) Como $2x = 3(5)$, $2x = 15$ o $x = 7\frac{1}{2}$.

(*e*) Como $3(2x - 3)$, se tiene $6x - 9 = 5x$, de modo que $x = 9$.

(*f*) Como $4(7) = (x - 2)(x + 2)$, se tiene $28 = x^2 - 4$. Entonces $x^2 = 32$, de modo que $x = \pm 4\sqrt{2}$.

7.8 Cálculo de la Cuarta Proporcional de Tres Números Dados

Calcule la cuarta proporcional de (*a*) 2, 4, 6; (*b*) 4, 2, 6; (*c*) $\frac{1}{2}$, 3, 4; (*d*) b, d, c.

Soluciones

(*a*) Se tiene $2:4 = 6:x$, de modo que $2x = 24$ o $x = 12$.

(*b*) Se tiene $4:2 = 6:x$, de modo que $4x = 12$ o $x = 3$.

(*c*) Se tiene $\frac{1}{2}:3 = 4:x$, de modo que $\frac{1}{2}x = 12$ o $x = 24$.

(*d*) Se tiene $b:d = c:x$, de modo que $bx = cd$ o $x = cd/b$.

7.9 Cálculo de la Media Proporcional de Dos Números Dados

Calcule la media proporcional positiva x entre (*a*) 5 y 20; (*b*) $\frac{1}{2}$ y $\frac{8}{9}$.

Soluciones

(*a*) Se tiene $5:x = x:20$, de modo que $x^2 = 100$ o $x = 10$.

(*b*) Se tiene $\frac{1}{2}:x = x:\frac{8}{9}$, de modo que $x^2 = \frac{4}{9}$ o $x = \frac{2}{3}$.

7.10 Conversión de Productos Iguales en Proporciones

(*a*) Construya una proporción cuyo cuarto término sea x, tal que $2bx = 3s^2$.

(*b*) Calcule la razón x a y si $ay = bx$.

Soluciones

(*a*) $2b:3s = s:x$ o $2b:3 = s^2:x$ o $2b:s^2 = 3:x$

(*b*) $x:y = a:b$

7.11 Conversión de Proporciones en Nuevas Proporciones

Utilice cada una de las siguientes proporciones para formar una nueva proporción cuyo primer término sea x:

(*a*) $\frac{15}{x} = \frac{3}{4}$ (*b*) $\frac{x-6}{6} = \frac{5}{3}$

(*c*) $\frac{x+8}{8} = \frac{8}{3}$ (*d*) $\frac{5}{2} = \frac{15}{x}$

Soluciones

(*a*) Por el principio 3, $\frac{x}{15} = \frac{4}{3}$.

(*b*) Por el principio 5, $\frac{x}{6} = \frac{8}{3}$.

(*c*) Por el principio 6, $\frac{x}{8} = \frac{1}{3}$.

(*d*) Por el principio 4, $\frac{x}{2} = \frac{15}{5}$.

7.12 Combinación de Numeradores y Denominadores de Proporciones

Utilice el principio 8 para calcular x en cada una de las siguientes proporciones:

(*a*) $\frac{x-2}{9} = \frac{2}{3}$ (*b*) $\frac{x+y}{8} = \frac{x-y}{4} = \frac{2}{3}$ (*c*) $\frac{3x-y}{15} = \frac{y-3}{10} = \frac{3}{5}$

Soluciones

(*a*) Al sumar numeradores y denominadores se obtiene $\frac{x-2+2}{9+3} = \frac{2}{3}$ o $\frac{x}{12} = \frac{2}{3}$, de modo que $x = 8$.

(*b*) Se tiene $\frac{(x+y)+(x-y)}{8+4} = \frac{2}{3}$, de aquí resulta $\frac{2x}{12} = \frac{2}{3}$, de modo que $x = 4$.

(*c*) Se utilizan las tres razones para obtener $\frac{(3x-y)+(y-3)+3}{15+10+5} = \frac{3}{5}$ o $\frac{3x}{30} = \frac{3}{5}$, de modo que $x = 6$.

7.3 SEGMENTOS PROPORCIONALES

Si dos segmentos se dividen proporcionalmente, (1) los nuevos segmentos correspondientes son proporcionales, y (2) los dos segmentos originales y cualquier par de nuevos segmentos correspondientes son proporcionales.

Así, si $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en la figura 7-1 se dividen proporcionalmente por $\overline{DE}$, se puede escribir una proporción como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ utilizando los cuatro segmentos; o se puede escribir una proporción como $\frac{a}{AB} = \frac{c}{AC}$ utilizando los dos segmentos originales y dos de los nuevos segmentos.

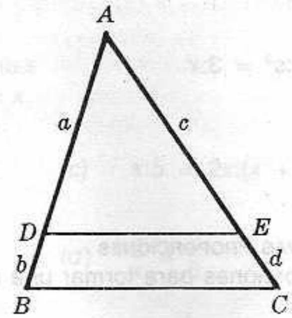
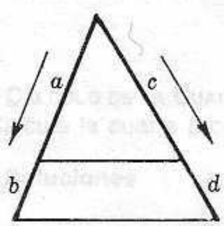


Fig. 7-1

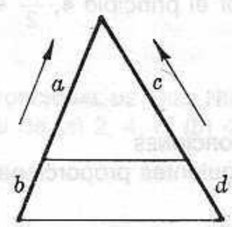
7.3A Obtención de las ocho disposiciones de cualquier proporción

Una proporción como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ puede reescribirse en ocho formas. Para obtener las ocho variaciones, se permite que cada término de la proporción represente a uno de los nuevos segmentos de la figura 7-1. Se obtienen dos de las posibles proporciones, de cada dirección, de la siguiente manera:



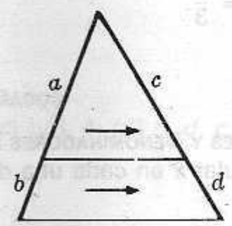
Dirección: hacia abajo

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$



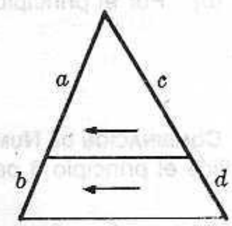
Dirección: hacia arriba

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ o $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$



Dirección: hacia la derecha

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ o $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$



Dirección: hacia la izquierda

$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ o $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

7.3B Principios sobre segmentos proporcionales

PRINCIPIO 1: *si una línea es paralela a un lado de un triángulo, entonces ésta divide a los otros dos lados proporcionalmente.*

De este modo, en el $\triangle ABC$ de la figura 7-2, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

TEO. TALES

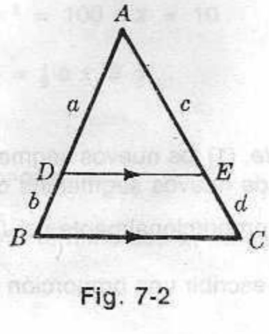


Fig. 7-2

PRINCIPIO 2: *si una línea divide proporcionalmente a dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado.* (Los principios 1 y 2 son conversos.)

Así, en el $\triangle ABC$ (Fig. 7-2), si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

PRINCIPIO 3: *tres o más paralelas dividen proporcionalmente a dos transversales cualesquiera.*

Por ello, si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ en la figura 7-3, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

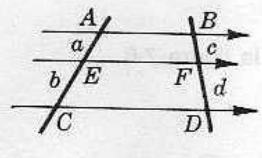


Fig. 7-3

PRINCIPIO 4: *la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos que son proporcionales a los lados adyacentes.*

De este modo, en el $\triangle ABC$ de la figura 7-4, si $\overline{CD}$ bisecta al $\angle C$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

TEO. BISECTRIZ

$\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$

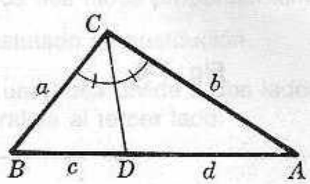


Fig. 7-4

PROBLEMAS RESUELTOS

7.13 APLICACIÓN DEL PRINCIPIO 1

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-5

$\frac{x}{12} = \frac{28}{14}$

$x = \frac{28 \cdot 12}{14}$

$x = 24$

$\frac{x}{x+4} = \frac{5}{7}$

$7x = 5(x+4)$

$7x = 5x+20$

$2x = 20$

$x = 10$

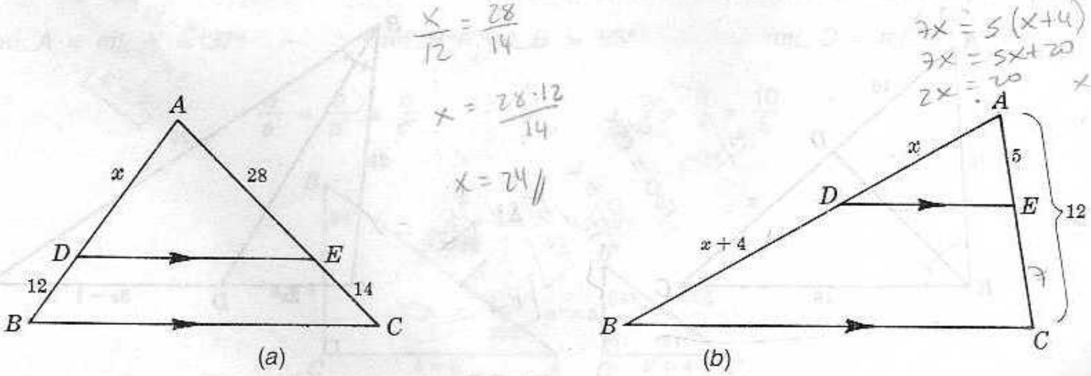


Fig. 7-5

Soluciones

(*a*) $\overline{DE} \| \overline{BC}$; de aquí $\frac{x}{12} = \frac{28}{14}$, de modo que $x = 24$.

(*b*) Se tiene que $EC = 7$ y $\overline{DE} \| \overline{BC}$; de aquí $\frac{x}{x+4} = \frac{5}{7}$. Entonces, $7x = 5x + 20$ y $x = 10$.

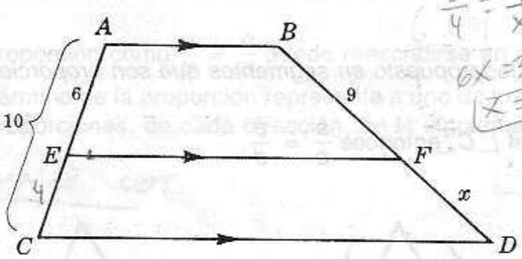
7.14 Aplicación del Principio 3

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-6

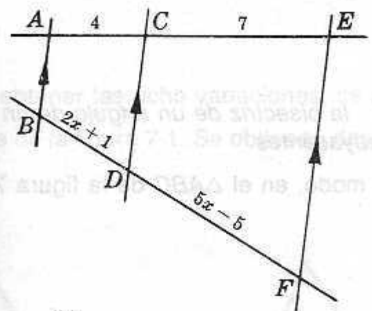
$\frac{6}{4} = \frac{9}{x}$

$6x = 36$

$\boxed{x = 6}$



(*a*)



(*b*)

Fig. 7-6

$\frac{2x+1}{5x-5} = \frac{4}{7}$

$7(2x+1) = 4(5x-5)$

$14x + 7 = 20x - 20$

$27 = 6x$

$\frac{27}{6} = x$ 4.5×5 $4\frac{1}{2}$ $\frac{9}{2}$

Soluciones

(*a*) Se tiene $EC = 4$ y $\overline{AB} \| \overline{EF} \| \overline{CD}$; de aquí $\frac{x}{9} = \frac{4}{6}$ y $x = 6$.

(*b*) $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD} \| \overleftrightarrow{EF}$; de aquí $\frac{5x-5}{2x+1} = \frac{7}{4}$, de lo que $20x - 20 = 14x + 7$. Entonces $6x = 27$ y $x = 4\frac{1}{2}$.

$\frac{21}{30} = \frac{2x}{3x-1}$

$60x$

$21(3x-1) = 60x$

$63x - 21 = 60x$

$3x = 21$

$\boxed{x = 7}$

7.15 Aplicación del Principio 4

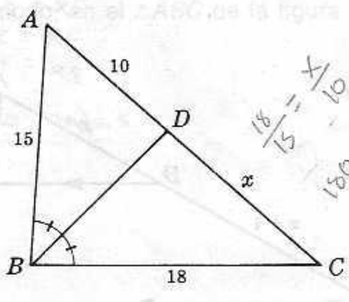
Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-7

$\frac{18}{15} = \frac{x}{10}$

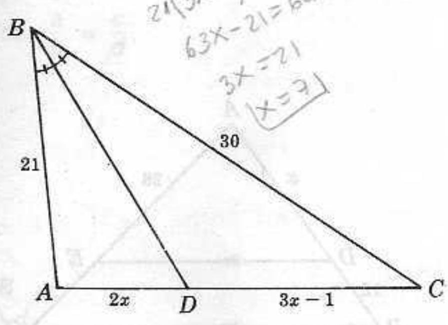
$180 = 15x$

$\frac{180}{15} = x$

$\boxed{12 = x}$



(*a*)



(*b*)

Fig. 7-7

Soluciones

(*a*) $\overline{BD}$ bisecta al $\angle B$; de aquí $\frac{x}{10} = \frac{18}{15}$ y $x = 12$.

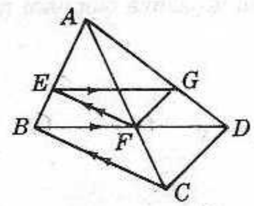
(*b*) $\overline{BD}$ bisecta al $\angle B$; de aquí $\frac{3x-1}{2x} = \frac{30}{21} = \frac{10}{7}$. De modo que $21x - 7 = 20x$ y $x = 7$.

7.16 Resolución de un Problema sobre Segmentos Proporcionales

Dado: $\overline{EG} \| \overline{BD}$, $\overline{EF} \| \overline{BC}$

Demuéstrese: $\overline{FG} \| \overline{CD}$

Plan: Demuéstrese que $\overline{FG}$ divide a $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ proporcionalmente.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{EG} \| \overline{BD}$, $\overline{EF} \| \overline{BC}$	1. Dado
2. $\frac{AE}{EB} = \frac{AG}{GD}$, $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$	2. Una línea (segmento) paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados proporcionalmente.
3. $\frac{AF}{FC} = \frac{AG}{GD}$	3. Postulado de sustitución.
4. $\overline{FG} \| \overline{CD}$	4. Si una línea divide a dos lados de un triángulo proporcionalmente, es paralela al tercer lado.

7.4 TRIÁNGULOS SIMILARES

Los *polígonos similares* son aquellos cuyos ángulos correspondientes son congruentes y cuyos lados correspondientes son proporcionales. Los polígonos similares tienen la misma forma aunque no el mismo tamaño.

El símbolo para "similar" es $\sim$. La notación $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ se lee como "el triángulo *ABC* es similar al triángulo *A*-prima *B*-prima *C*-prima". Como en el caso de triángulos congruentes, *los lados correspondientes de los triángulos similares aparecen opuestos a ángulos congruentes.* (Nótese que los lados y ángulos correspondientes se designan comúnmente con las mismas letras, agregándoles primas.)

En la figura 7-8 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ya que

$$m\angle A = m\angle A' = 37° \qquad m\angle B = m\angle B' = 53° \qquad m\angle C = m\angle C' = 90°$$

y

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \qquad \text{o} \qquad \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5}$$

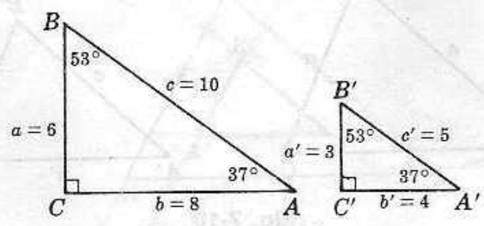


Fig. 7-8

7.4A Selección de triángulos similares para demostrar una proporción

En el problema resuelto 7.25, se supone que $ABCD$, en una figura como la figura 7-9, es un paralelogramo, y se deb demostrar que $\frac{AE}{BC} = \frac{AF}{FB}$. Para demostrar esta proporción, es necesario encontrar triángulos similares cuyos lado estén en la misma proporción. Esto se puede hacer seleccionando el triángulo cuyas letras A, E y F estén en los numera dores y el triángulo cuyas letras B, C y F estén en los denominadores. De este modo se probaría que $\triangle AEF \sim \triangle BCF$

Suponga que la proporción que se va a demostrar es $\frac{AE}{AF} = \frac{BC}{FB}$. En un caso como éste, el hecho de intercambia los medios conduce a $\frac{AE}{BC} = \frac{AF}{FB}$. Se pueden seleccionar entonces los triángulos necesarios con base en los numerado res y los denominadores.

¿ $\frac{AE}{BC} = \frac{AF}{FB}$?

$\frac{AE}{AF} = \frac{BC}{FB}$

$\triangle AEF \sim \triangle BCF$

$\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{FB}$ BC

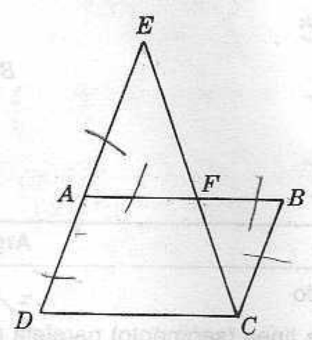


Fig. 7-9

Suponga que la proporción que se va a demostrar es $\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{FB}$. Entonces, el método para seleccionar triángulos no puede utilizarse hasta que el término AD sea reemplazado por BC. Esto es posible ya que $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son lados opuestos del paralelogramo $ABCD$ y por lo tanto, son congruentes.

7.4B Principios sobre triángulos similares

PRINCIPIO 1: *los ángulos correspondientes de triángulos similares son congruentes*. (Por definición.)

PRINCIPIO 2: *los lados correspondientes de triángulos similares son proporcionales*. (Por definición.)

PRINCIPIO 3: *dos triángulos son similares si dos ángulos de un triángulo son congruentes respectivamente con dos ángulos del otro.*

Así, en la figura 7-10, si $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

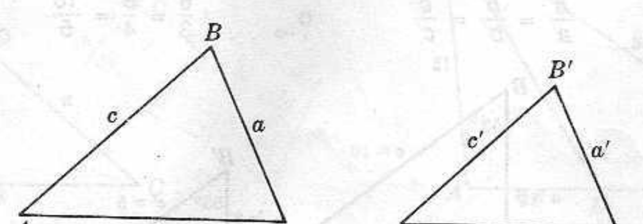


Fig. 7-10

Principio 4: *dos triángulos son similares si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo del otro y los lados que incluyen estos ángulos son proporcionales.*

Por ello, en la figura 7-10, si $\angle C \cong \angle C'$ y $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Principio 5: *dos triángulos son similares si sus lados correspondientes son proporcionales.*

En la figura 7-10, si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, entonces $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Principio 6: *dos triángulos rectángulos son similares si un ángulo agudo de uno es congruente con un ángulo agudo del otro.* (Corolario del principio 3.)

Principio 7: *una línea paralela a un lado de un triángulo forma un triángulo similar al triángulo dado.*

En la figura 7-11, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

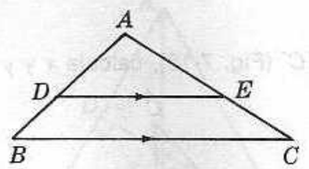


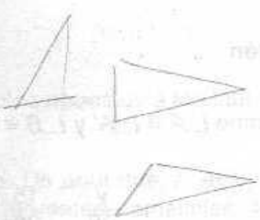
Fig. 7-11

Principio 8: *los triángulos similares a un mismo triángulo son similares entre sí.*

Principio 9: *la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a éste en dos triángulos que son similares al triángulo dado y entre sí.*

Así, en la figura 7-12, $\triangle CDA \sim \triangle CDB \sim \triangle ABC$.

Teo. Euclides



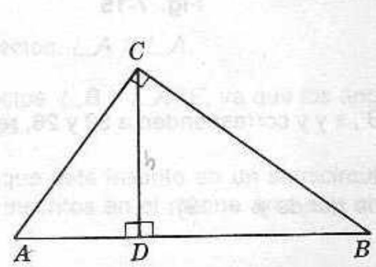


Fig. 7-12

Principio 10: *dos triángulos son similares si sus lados respectivos son paralelos entre sí.*

En la figura 7-13, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

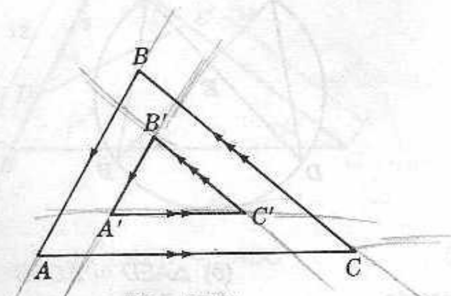


Fig. 7-13

Principio 11: *dos triángulos son similares si sus lados respectivos son perpendiculares entre sí.*

Así, en la figura 7-14, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

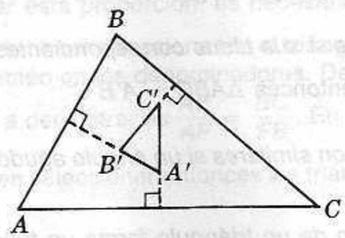


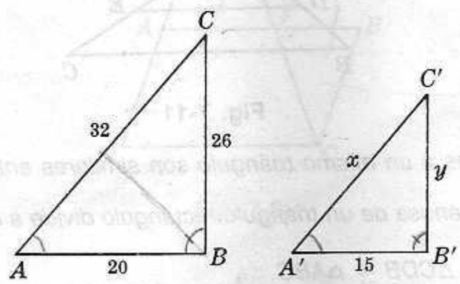
Fig. 7-14

PROBLEMAS RESUELTOS

7.17 Aplicación del Principio 2

En los triángulos similares ABC y $A'B'C'$ (Fig. 7-15), calcule x y y si $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$.

$\frac{20}{15} = \frac{32}{x}$ =0



$\frac{x}{32}$ =

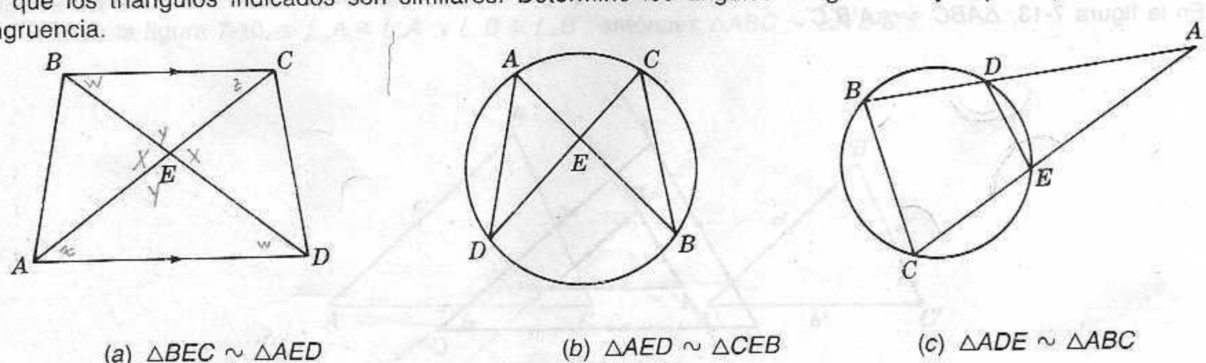
Fig. 7-15

Solución

Como $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong B'$, x y y corresponden a 32 y 26, respectivamente. Entonces $\frac{x}{32} = \frac{15}{20}$, de donde $x = 24$; asimismo $\frac{y}{26} = \frac{15}{20}$, de donde $y = 19\frac{1}{2}$.

7.18 Aplicación del Principio 3

En cada una de las secciones de la figura 7-16, se pueden utilizar dos pares de ángulos congruentes para demostrar que los triángulos indicados son similares. Determine los ángulos congruentes y especifique la razón de su congruencia.



(a) $\triangle BEC \sim \triangle AED$
$ABCD$ es un trapezoide

(b) $\triangle AED \sim \triangle CEB$

(c) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

Fig. 7-16

Soluciones

(*a*) $\angle CBD \cong \angle BDA$ y $\angle BCA \cong \angle CAD$, ya que los ángulos alternos internos de líneas paralelas son congruentes ($\overline{BC} \| \overline{AD}$). Además, $\angle BEC$ y $\angle AED$ son ángulos congruentes opuestos por el vértice.

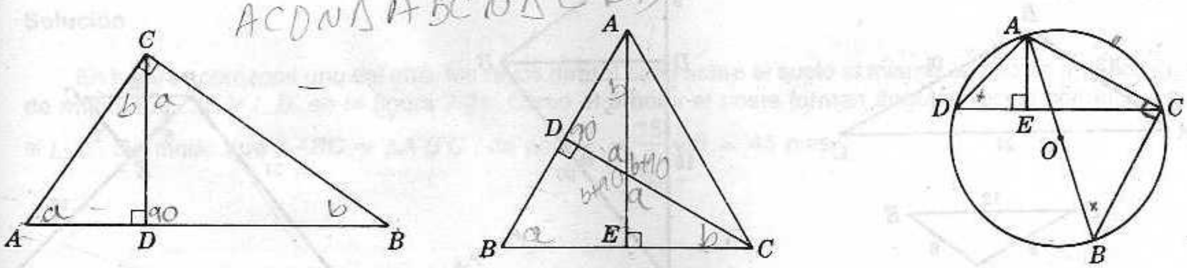
(*b*) $\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$, ya que los ángulos inscritos en el mismo arco son congruentes. Además, $\angle AED$ y $\angle CEB$ son ángulos congruentes opuestos por el vértice.

(*c*) $\angle ABC \cong \angle AED$, ya que cada uno es suplemento del $\angle DEC$. $\angle ACB \cong \angle ADE$, ya que cada uno es suplemento del $\angle BDE$. Además, $\angle A \cong \angle A$.

7.19 Aplicación del Principio 6

En cada sección de la figura 7-17, determine los ángulos que pueden utilizarse para demostrar que los triángulos indicados son similares.

ACD ∼ △ABC ∼ △CBD



(*a*) $\triangle ACD \sim \triangle ACB$ (*b*) $\triangle AEC \sim \triangle CDB$, $AB = AC$ (*c*) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, $\overline{AB}$ es un diámetro

ACD ∼ ABC

Fig. 7-17

Soluciones

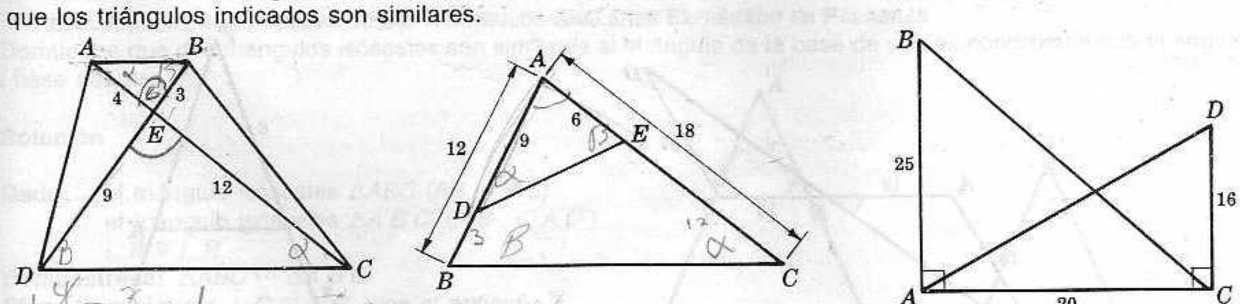
(*a*) $\angle ACB$ y $\angle ADC$ son ángulos rectos. $\angle A \cong \angle A$.

(*b*) $\angle AEC$ y $\angle BDC$ son ángulos rectos. $\angle B \cong \angle ACE$, ya que los ángulos opuestos a los lados congruentes en un triángulo son congruentes.

(*c*) $\angle ACB$ es un ángulo recto, ya que está inscrito en un semicírculo. De aquí que, $\angle AED \cong \angle ACB$. $\angle D \cong \angle B$ ya que los ángulos inscritos en el mismo arco son congruentes.

7.20 Aplicación del Principio 4

En cada sección de la figura 7-18, determine el par de ángulos congruentes y la proporción necesaria para demostrar que los triángulos indicados son similares.



$\frac{4}{12} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(*a*) $\triangle AEB \sim \triangle DEC$ (*b*) $\triangle AED \sim \triangle ABC$ (*c*) $\triangle ABC \sim \triangle ADC$

Fig. 7-18

$\frac{9}{6} = \frac{18}{12}$

Soluciones

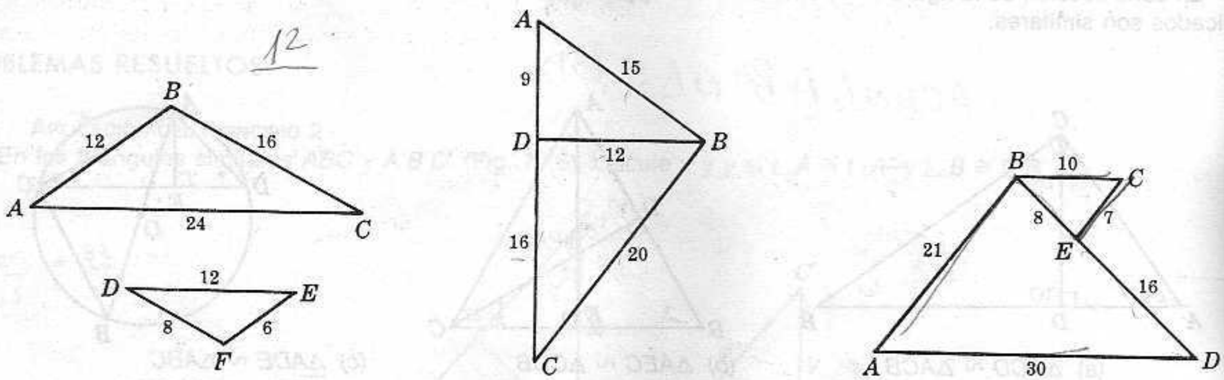
(*a*) $\angle AEB \cong \angle DEC$; $\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ (*e*) $\angle BAC \cong \angle ACD$; $\frac{20}{16} = \frac{25}{20}$

(*b*) $\angle A \cong \angle A$; $\frac{6}{12} = \frac{9}{18}$

7.21 Aplicación del Principio 5

En cada una de las secciones de la figura 7-19, determine la proporción necesaria para demostrar que los triángulos indicados son similares.

12



(*a*) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (*b*) $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ (*c*) $\triangle ABD \sim \triangle BEC$

Fig. 7-19

21/8

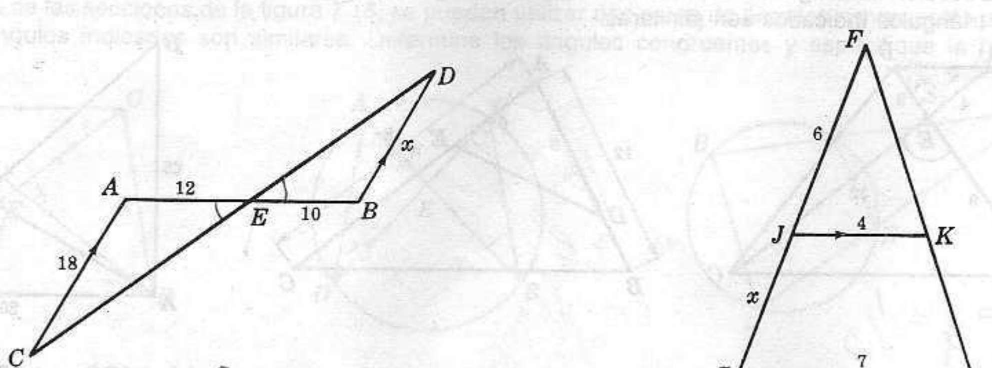
Soluciones

(*a*) $\frac{6}{12} = \frac{8}{16} = \frac{12}{24}$ (*c*) $\frac{7}{21} = \frac{8}{24} = \frac{10}{30}$

(*b*) $\frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20}$

7.22 Proporciones que se obtienen de los triángulos similares

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-20



(*a*) (*b*) (*b*)

Fig. 7-20

Soluciones

(*a*) Como $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$, $\angle A \cong \angle B$ y $\angle C \cong \angle D$; por lo que $\triangle AEC \sim \triangle DEB$. Entonces $\frac{x}{18} = \frac{10}{12}$ y $x = 15$.

(*b*) Como $\overline{JK} \parallel \overline{GH}$, $\triangle FJK \sim \triangle FGH$ por el principio 7. Por lo que $\frac{6}{x+6} = \frac{4}{7}$ y $x = 4\frac{1}{2}$.

7.23 CÁLCULO DE ALTURAS POR MEDIO DE LA SOMBRA EN EL SUELO

Un árbol proyecta una sombra de 15 pies al mismo tiempo que un poste vertical cercano de 6 pies de altura produce una sombra de 2 pies. Calcule la altura del árbol si ambos, el árbol y el poste, forman ángulos rectos con el suelo.

Solución

En lugares cercanos uno del otro, los rayos del sol caen sobre el suelo al mismo tiempo en ángulos iguales; de modo que $\angle B \cong \angle B'$ en la figura 7-21. Como el árbol y el poste forman ángulos rectos con el suelo, $\angle C \cong \angle C'$. De modo que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, de aquí $\frac{h}{6} = \frac{15}{2}$ y $h = 45$ pies.

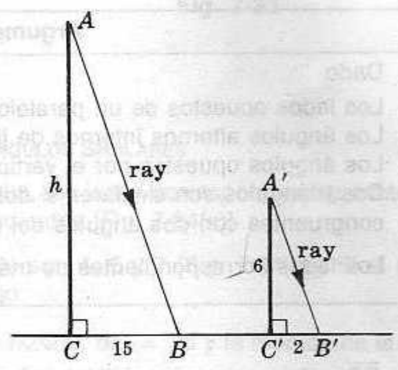
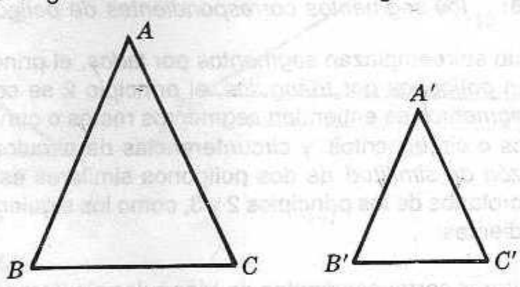


Fig. 7-21

7.24 RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA SOBRE TRIÁNGULOS SIMILARES EXPRESADO EN PALABRAS

Demuestre que dos triángulos isósceles son similares si el ángulo de la base de uno es congruente con el ángulo de la base del otro.

Solución



Dado: el triángulo isósceles $\triangle ABC$ ($AB = AC$)
el triángulo isósceles $\triangle A'B'C'$ ($A'B' = A'C'$)
$\angle B \cong \angle B'$

Demuéstrese: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Plan: Demuéstrese $\angle C \cong \angle C'$, use el principio 3.

DEMOSTRACIÓN:

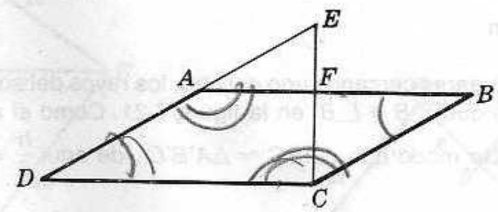
Proposiciones	Argumentos
1. $\angle B \cong \angle B'$ 2. $\angle B \cong \angle C$, $\angle B' \cong \angle C'$ 3. $\angle C \cong \angle C'$ 4. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$	1. Dado 2. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes. 3. Las cosas $\cong$ a las cosas $\cong$ son $\cong$ entre sí. 4. Dos triángulos son similares si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos del otro.

7.25 Resolución de un Problema sobre Proporciones que Involucra Triángulos Semejantes

Dado: el paralelogramo *ABCD*

Demuéstrese: $\frac{AE}{BC} = \frac{AF}{BF}$

Plan: Demuéstrese $\triangle AEF \sim \triangle BFC$



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. *ABCD* es un paralelogramo.	1. Dado
2. $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$	2. Los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos.
3. $\angle DEC \cong \angle ECB$	3. Los ángulos alternos internos de líneas paralelas son congruentes.
4. $\angle EFA \cong \angle BFC$	4. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
5. $\triangle AEF \sim \triangle BFC$	5. Dos triángulos son similares si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos del otro.
6. $\frac{AE}{BC} = \frac{AF}{BF}$	6. Los lados correspondientes de triángulos similares son proporcionales.

7.5 EXTENSIÓN DE UN PRINCIPIO BÁSICO SOBRE PROPORCIONES

Principio 1: *los lados correspondientes de triángulos similares son proporcionales.*

Principio 2: *los segmentos correspondientes de triángulos similares son proporcionales.*

Principio 3: *los segmentos correspondientes de polígonos similares son proporcionales.*

Cuando se reemplazan *segmentos* por *lados*, el principio 1 se convierte en el principio 2 más general. Cuando se reemplazan *polígonos* por *triángulos*, el principio 2 se convierte en el principio 3, aún más general.

Por *segmentos* se entienden segmentos rectos o curvos tales como alturas, medianas, bisectrices, radios de círculos inscritos o circunscritos, y circunferencias de círculos inscritos o circunscritos.

La *razón de similitud* de dos polígonos similares es la razón de cualquier par de líneas correspondientes.

Los corolarios de los principios 2 y 3, como los siguientes, se pueden inventar para cualquier combinación de líneas correspondientes:

1. Las *alturas* correspondientes de triángulos similares tienen la misma razón, como dos *medianas* correspondientes cualquiera. Así, si $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ en la figura 7-22, entonces $\frac{h}{h'} = \frac{m}{m'}$.

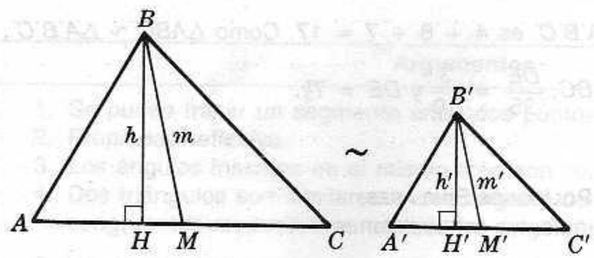


Fig. 7-22

2. Los *perímetros* de los polígonos similares están en la misma razón que dos *lados* correspondientes cualesquiera. Así, en la figura 7-23, si el cuadrilátero I es $\sim$ al cuadrilátero I′, entonces $\frac{34}{17} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{6}{5} = \frac{14}{7}$.

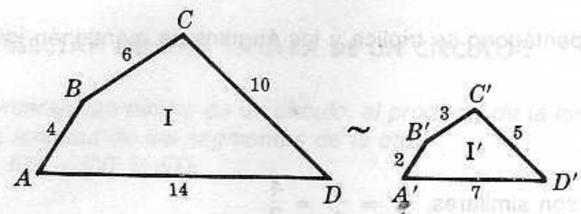


Fig. 7-23

PROBLEMAS RESUELTOS

7.26 Razones Entre Líneas de Triángulos Similares

(*a*) En dos triángulos similares, los lados correspondientes están en proporción de 3:2. Calcule la razón de sus medianas correspondientes [Fig. 7-24(*a*)].

(*b*) Los lados de un triángulo son 4, 6 y 7 [Fig. 7-24(*b*)]. Si el perímetro de un triángulo similar es de 51, calcule su lado más largo.

(*c*) En el $\triangle ABC$ de la figura 7-24(*c*), $BC = 25$ y la medida de la altura sobre $\overline{BC}$ es de 10. Un segmento de línea que termina en los lados del triángulo es paralelo a $\overline{BC}$ y está a 3 unidades de A. Calcule su longitud.

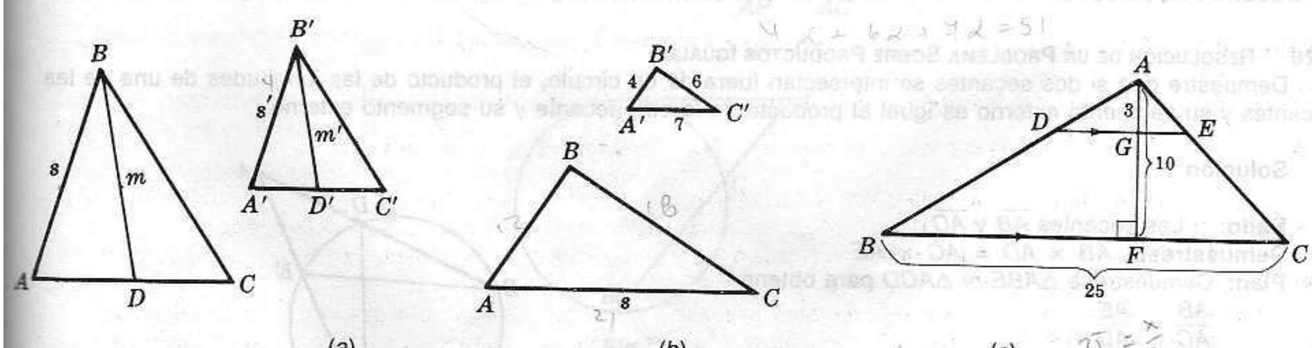


Fig. 7-24

Soluciones

(*a*) Si $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ y $\frac{s}{s'} = \frac{3}{2}$, entonces $\frac{m}{m'} = \frac{3}{2}$.

(*b*) El perímetro del $\triangle A'B'C'$ es $4 + 6 + 7 = 17$. Como $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\frac{s}{7} = \frac{51}{17}$ y $s = 21$.

(*c*) Como $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, $\frac{DE}{25} = \frac{3}{10}$ y $DE = 7\frac{1}{2}$.

7.27 RAZONES ENTRE LÍNEAS DE POLÍGONOS SIMILARES
Complete cada una de las siguientes proposiciones:

(*a*) Si los lados correspondientes de dos polígonos similares están en la proporción de 4:3, entonces la razón de sus perímetros es de ___?___.

(*b*) El perímetro de dos cuadriláteros similares es de 30 y 40 respectivamente. Si un lado del cuadrilátero menor es 8, el lado correspondiente del mayor es de ___?___.

(*c*) Si cada lado de un pentágono se triplica y los ángulos se mantienen iguales, entonces cada diagonal es ___?___.

Soluciones

(*a*) Como los polígonos son similares, $\frac{p}{p'} = \frac{s}{s'} = \frac{4}{3}$.

(*b*) Como los cuadriláteros son similares, $\frac{s}{s'} = \frac{p}{p'}$. Entonces $\frac{s}{8} = \frac{30}{24}$ y $s = 10$.

(*c*) Triplíquese, ya que los polígonos son similares si sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales.

7.6 DEMOSTRACIÓN DE PRODUCTOS IGUALES DE LONGITUDES DE SEGMENTOS

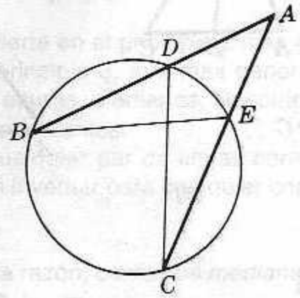
En un problema, para demostrar que el producto de la longitud de dos segmentos es igual al producto de la longitud de otro par de segmentos, es necesario establecer la proporción que conduce a los dos productos iguales.

PROBLEMA RESUELTO

7.28 RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA SOBRE PRODUCTOS IGUALES
Demuestre que si dos secantes se intersectan fuera de un círculo, el producto de las longitudes de una de las secantes y su segmento externo es igual al producto de la otra secante y su segmento externo.

Solución

Dado: Las secantes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$
Demuéstrese: $AB \times AD = AC \times AE$
Plan: Demuéstrese $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ para obtener $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. Trace $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$.	1. Se puede trazar un segmento entre dos puntos cualesquiera.
2. $\angle A \cong \angle A$	2. Propiedad reflexiva.
3. $\angle B \cong \angle C$	3. Los ángulos inscritos en el mismo arco son congruentes.
4. $\triangle AEB \sim \triangle ADC$	4. Dos triángulos son similares si dos ángulos de un triángulo son congruentes respectivamente con dos ángulos del otro.
5. $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$	5. Los lados correspondientes de triángulos similares son proporcionales.
6. $AB \times AD = AC \times AE$	6. En una proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

7.7 SEGMENTOS QUE SE INTERSECTAN DENTRO Y FUERA DE UN CÍRCULO

PRINCIPIO 1: *si dos cuerdas se intersectan dentro de un círculo, el producto de la longitud de los segmentos de una cuerda es igual al producto de la longitud de los segmentos de la otra.*

Así, en la figura 7.25, $AE \times EB = CE \times ED$.

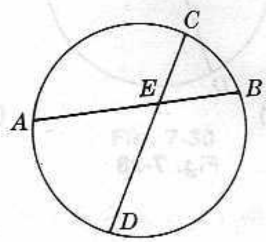


Fig. 7-25

PRINCIPIO 2: *si una tangente y una secante se intersectan fuera de un círculo, la tangente es la media proporcional entre la secante y su segmento externo.*

Por ello, en la figura 7.26, si $\overline{PA}$ es una tangente, entonces $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{AC}$.

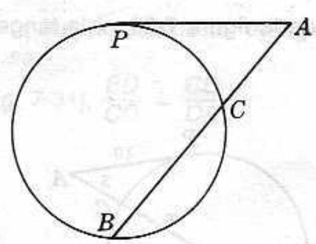


Fig. 7-26

PRINCIPIO 3: *si dos secantes se intersectan fuera de un círculo, el producto de las longitudes de una de las secantes y su segmento externo, es igual al producto de las longitudes de la otra secante y su segmento externo.*

De este modo, en la figura 7.27 $AB \times AD = AC \times AE$.

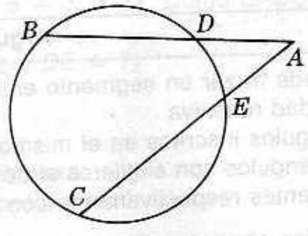
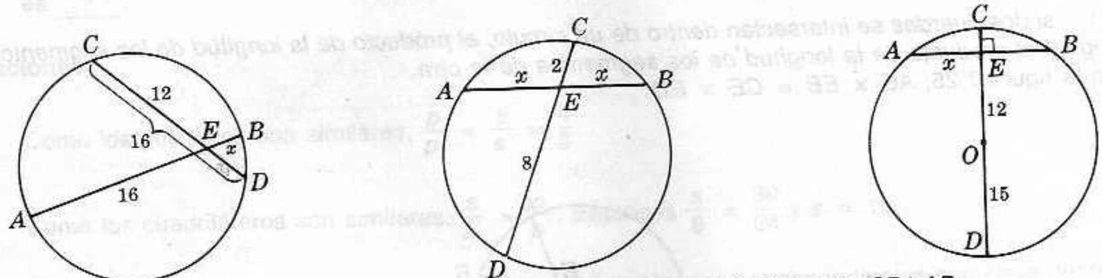


Fig. 7-27

PROBLEMAS RESUELTOS

7.29 Aplicación del Principio 1

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-28, si las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersectan en E.



(a) (b) (c) Diámetro $CD \perp AB$

Fig. 7-28

Soluciones

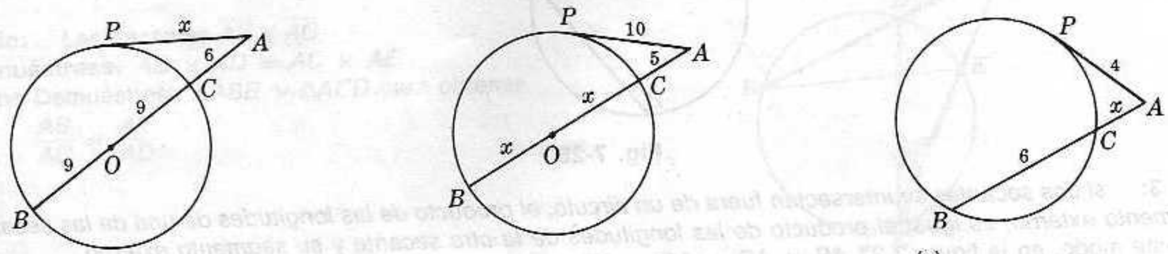
(a) $ED = 4$. Entonces $16x = 4(12)$, de modo que $16x = 48$ o $x = 3$.

(b) $AE = EB = x$. Entonces $x^2 = 8(2)$, así $x^2 = 16$ y $x = 4$.

(c) $CE = 3$ y $AE = EB = x$. Entonces $x^2 = 27(3)$ o $x^2 = 81$ y $x = 9$.

7.30 Aplicación del Principio 2

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-29, si la tangente $\overline{AP}$ y $\overline{AB}$ se intersectan en A.



(a) (b) (c)

Fig. 7-29

Soluciones

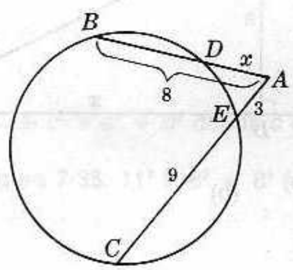
(*a*) $AB = 9 + 9 + 6 = 24$. Entonces $x^2 = 24(6)$ o $x^2 = 144$ y $x = 12$.

(*b*) $AB = 2x + 5$. Entonces $5(2x + 5) = 100$ y $x = 7\frac{1}{2}$.

(*c*) $AB = x + 6$. Entonces $x(x + 6) = 16$ o $x^2 + 6x - 16 = 0$.
Por factorización se obtiene $(x + 8)(x - 2) = 0$ y $x = 2$.

7.31 APLICACIÓN DEL PRINCIPIO 3

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-30, si las secantes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se intersectan en A.



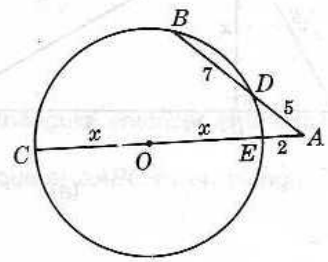


Fig. 7-30

Soluciones

(*a*) $AC = 12$. Entonces $8x = 12(3)$ y $x = 4\frac{1}{2}$.

(*b*) $AC = 2x + 2$ y $AB = 12$. Entonces $2(2x + 2) = 12(5)$ y $x = 14$.

7.8 MEDIAS PROPORCIONALES EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

PRINCIPIO 1: *la longitud de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la media proporcional entre la longitud de los segmentos de la hipotenusa.*

Así, en el triángulo rectángulo ABC (Fig. 7-31), $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{CD}{DA}$. Teo. Euclides

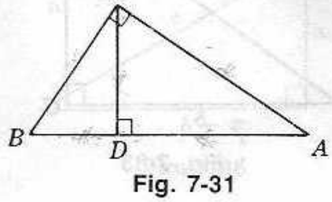


Fig. 7-31

Principio 2: *en un triángulo rectángulo, la longitud de cualquier lado es la media proporcional entre las longitudes de la hipotenusa y la longitud de la proyección de ese lado sobre la hipotenusa.*

Así, en el $\triangle$ rectángulo ABC, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{BD}$ y $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$.

En el capítulo 16 se da una demostración de este principio.

PROBLEMAS RESUELTOS

7.32 Cálculo de Medias Proporcionales en Triángulos Rectángulos

En cada uno de los triángulos de la figura 7-32, calcule x y y

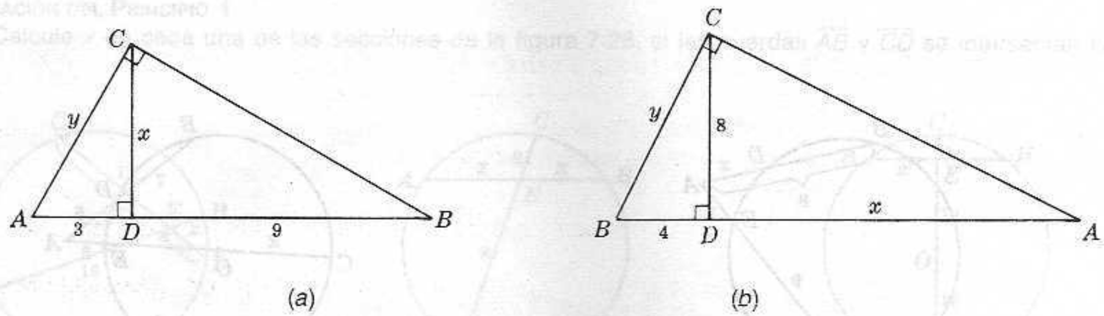


Fig. 7-32

Soluciones

(*a*) Por el principio 1, $\dfrac{3}{x} = \dfrac{x}{9}$ o $x^2 = 27$ y $x = 3\sqrt{3}$. Por el principio 2, $\dfrac{12}{y} = \dfrac{y}{3}$, así $y^2 = 36$ y $y = 6$.

(*b*) Por el principio 1, $\dfrac{x}{8} = \dfrac{8}{4}$ y $x = 16$. Por el principio 2, $\dfrac{20}{y} = \dfrac{y}{4}$, así $y^2 = 80$ y $y = 4\sqrt{5}$.

7.9 TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados. Así, en la figura 7-33, $c^2 = a^2 + b^2$.

En el capítulo 16 se da una demostración del teorema de Pitágoras.

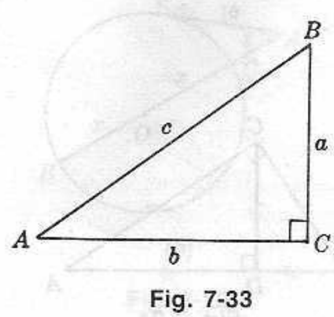


Fig. 7-33

7.9A Pruebas para triángulos rectángulos, agudos y obtusos

Si se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$ en los tres lados de un triángulo, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo; pero si $c^2 \neq a^2 + b^2$, entonces el triángulo no es un triángulo rectángulo.

En el $\triangle ABC$, si $c^2 < a^2 + b^2$ donde c es el lado más largo de un triángulo, entonces el triángulo es un triángulo agudo.

Por lo tanto, en la figura 7-34, $9^2 < 6^2 + 8^2$ (esto es, $81 < 100$); por lo que el $\triangle ABC$ es un triángulo agudo.

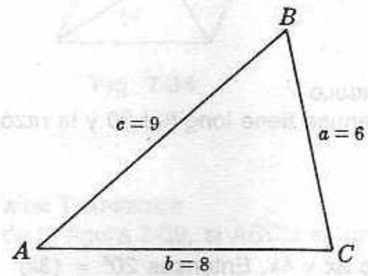


Fig. 7-34

En el $\triangle ABC$, si $c^2 > a^2 + b^2$ donde c es el lado más largo de un triángulo, entonces el triángulo es un triángulo obtuso.

Así, en la figura 7-35, $11^2 > 6^2 + 8^2$ (esto es, $121 > 100$); por lo que el $\triangle ABC$ es un triángulo obtuso.

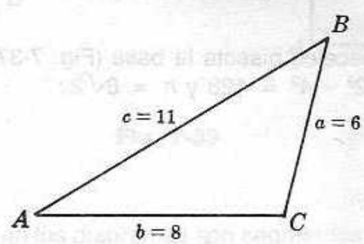


Fig. 7-35

PROBLEMAS RESUELTOS

7.33 Cálculo de los Lados de un Triángulo Rectángulo

En la figura 7-36, (*a*) calcule la longitud de la hipotenusa c si $a = 12$ y $b = 9$; (*b*) calcule a si $b = 6$ y $c = 8$; (*c*) calcule b si $a = 4\sqrt{3}$ y $c = 8$.

81 + 144

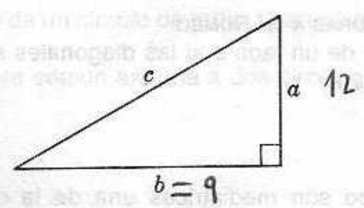


Fig. 7-36

Soluciones

(*a*) $c^2 = a^2 + b^2 = 12^2 + 9^2 = 225$ y $c = 15$.

(*b*) $a^2 = c^2 - b^2 = 8^2 - 6^2 = 28$ y $a = 2\sqrt{7}$.

(*c*) $b^2 = c^2 - a^2 = 8^2 - (4\sqrt{3})^2 = 64 - 48 = 16$ y $b = 4$.

7.34 RAZONES EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa tiene longitud 20 y la razón de sus lados es de 3:4. Calcule cada uno de sus lados.

Solución

Sea la longitud de sus lados $3x$ y $4x$. Entonces $20^2 = (3x)^2 + (4x)^2$.

Al efectuar las operaciones, se obtiene $400 = 9x^2 + 16x^2$ o $400 = 25x^2$ y $x = 4$; por lo que sus lados tienen longitud 12 y 16.

7.35 APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A UN TRIÁNGULO ISÓSCELES

Calcule la longitud de la altura sobre la base de un triángulo isósceles, si la base es 8 y los lados iguales son 12.

Solución

La altura h de un triángulo isósceles bisecta la base (Fig. 7-37).

Entonces $h^2 = a^2 - (\frac{1}{2}b)^2 = 12^2 - 4^2 = 128$ y $h = 8\sqrt{2}$.

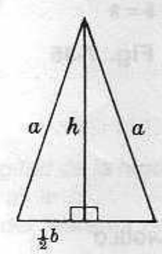


Fig. 7-37

7.36 APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A UN ROMBO

En un rombo, calcule (*a*) la longitud de un lado s si las diagonales son 30 y 40; (*b*) la longitud de una diagonal d si su lado es 26 y la otra diagonal es 20.

Solución

Las diagonales de un rombo son mediatrices una de la otra; por lo que $s^2 = (\frac{1}{2}d)^2 + (\frac{1}{2}d')^2$ en la figura 7-38.

(*a*) Si $d = 30$ y $d' = 40$, entonces $s^2 = 15^2 + 20^2 = 625$ o $s = 25$.

(*b*) Si $s = 26$ y $d' = 20$, entonces $26^2 = (\frac{1}{2}d)^2 + 10^2$ o $576 = (\frac{1}{2}d)^2$. Por lo que $\frac{1}{2}d = 24$ o $d = 48$.

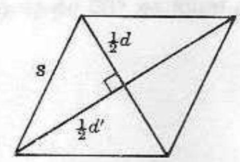
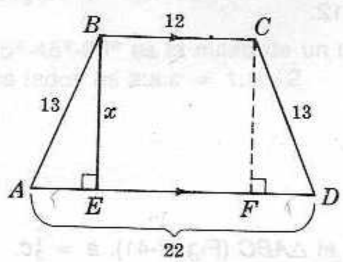


Fig. 7-38

7.37 APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A UN TRAPEZOIDE

Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-39, si $ABCD$ es un trapezoide.



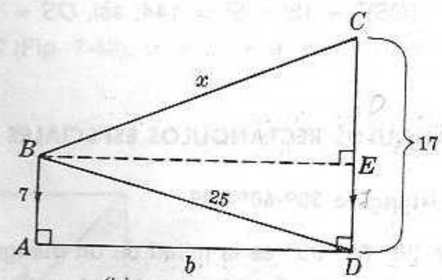


Fig. 7-39

Soluciones

Las perpendiculares punteadas en los diagramas son segmentos adicionales necesarios sólo para las soluciones.

Note cómo se forman rectángulos con estos segmentos agregados.

(*a*) $EF = BC = 12$ y $AE = \frac{1}{2}(22 - 12) = 5$. Entonces $x^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ o $x = 12$.

(*b*) $b^2 = 25^2 - 7^2 = 576$ o $b = 24$; además, $BE = b = 24$ y $CE = 17 - 7 = 10$. Entonces $x^2 = 24^2 + 10^2$ o $x = 26$.

7.38 APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A UN CIRCULO

(*a*) Calcule la distancia d del centro de un círculo de radio 17 a una cuerda cuya longitud es 30 [Fig. 7-40(*a*)].

(*b*) Calcule la longitud de la tangente común externa a dos círculos tangentes externamente, de radios 4 y 9 [Fig. 7-40(*b*)].

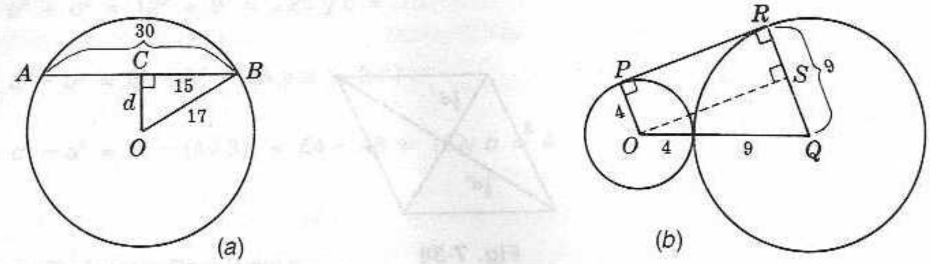


Fig. 7-40

Soluciones

(*a*) $BC = \frac{1}{2}(30) = 15$. Entonces $d^2 = 17^2 - 15^2 = 64$ y $d = 8$.

(*b*) $\overline{OS} \cong \overline{PR}$, $RS = 4$, $OQ = 13$ y $SQ = 9 - 4 = 5$. Entonces, en el triángulo rectángulo OSQ, $(OS)^2 = 13^2 - 5^2 = 144$; así, $OS = 12$, por lo que $PR = 12$.

7.10 TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS ESPECIALES

7.10A El triángulo 30°-60°-90°

Un triángulo 30°-60°-90° es la mitad de un triángulo equilátero. Así, en el $\triangle ABC$ (Fig. 7-41), $a = \frac{1}{2}c$.

Considere que $c = 2$; entonces $a = 1$, y por el teorema de Pitágoras resulta

$$b^2 = c^2 - a^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \quad \text{o} \quad b\sqrt{3}$$

La razón de sus lados es, por lo tanto, $a{:}b{:}c = 1{:}\sqrt{3}{:}2$.

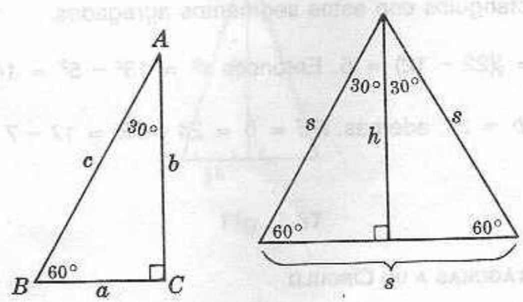


Fig. 7-41

Principios del triángulo 30°-60°-90°

PRINCIPIO 1: *la longitud del lado opuesto al ángulo de 30° es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.* En la figura 7-41, $a = \frac{1}{2}c$.

Principio 2: *la longitud del lado opuesto al ángulo de* 60° *es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa, multiplicada por la raíz cuadrada de* 3.
En la figura 7-41, $b = \frac{1}{2}c\sqrt{3}$.

Principio 3: *la longitud del lado opuesto al ángulo de* 60° *es igual a la longitud del lado opuesto al ángulo de* 30° *multiplicado por la raíz cuadrada de* 3.
En la figura 7-41, $b = a\sqrt{3}$.

Principio del triángulo equilátero

Principio 4: *la longitud de la altura de un triángulo equilátero, es igual a la mitad de la longitud de un lado multiplicado por la raíz cuadrada de* 3.
En la figura 7-41, $h = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$.

7.10B El triángulo 45°-45°-90°

Un triángulo 45°-45°-90° es la mitad de un cuadrado. En el $\triangle ABC$ (Fig. 7-42), $c^2 = a^2 + a^2$ o $c = a\sqrt{2}$. Por lo que la razón de sus lados es $a:a:c = 1:1:\sqrt{2}$.

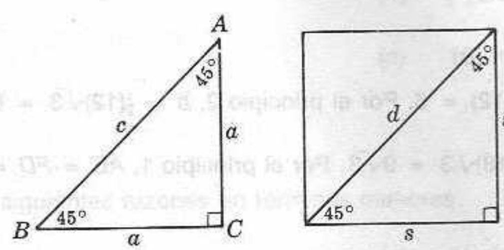


Fig. 7-42

Principios del triángulo 45°-45°-90°

Principio 5: *la longitud del lado opuesto al ángulo de* 45° *es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa multiplicada por la raíz cuadrada de* 2.
En la figura 7-42, $a = \frac{1}{2}c\sqrt{2}$.

Principio 6: *la longitud de la hipotenusa es igual a la longitud de un lado, multiplicada por la raíz cuadrada de* 2.
En la figura 7-42, $c = a\sqrt{2}$.

Principio del cuadrado

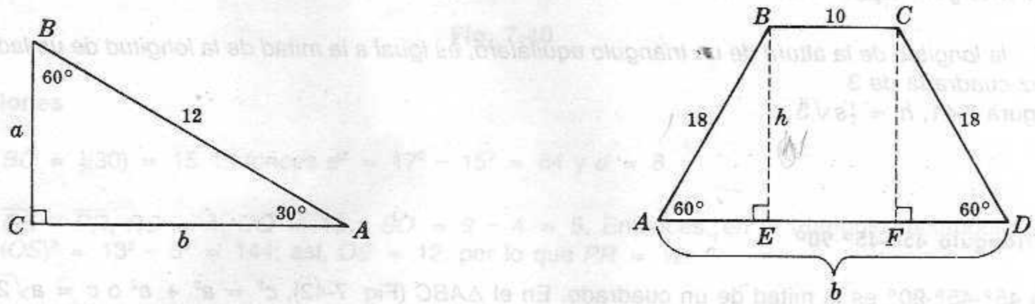
Principio 7: *en un cuadrado, la longitud de una diagonal es igual a la longitud de un lado, multiplicada por la raíz cuadrada de* 2.
En la figura 7-42, $d = s\sqrt{2}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

7.39 Aplicación de los Principios 1 y 4

(*a*) Si la longitud de la hipotenusa de un triángulo 30°-60°-90° es 12, calcule la longitud de sus lados [Fig. 7-43(*a*)].

(*b*) Cada lado de un trapezoide isósceles tiene longitud 18. Si los ángulos de la base son de 60° y la base menor es 10, calcule las longitudes de su altura y de su base mayor [Fig. 7-43(*b*)].



(*a*) (*b*)

Fig. 7-43

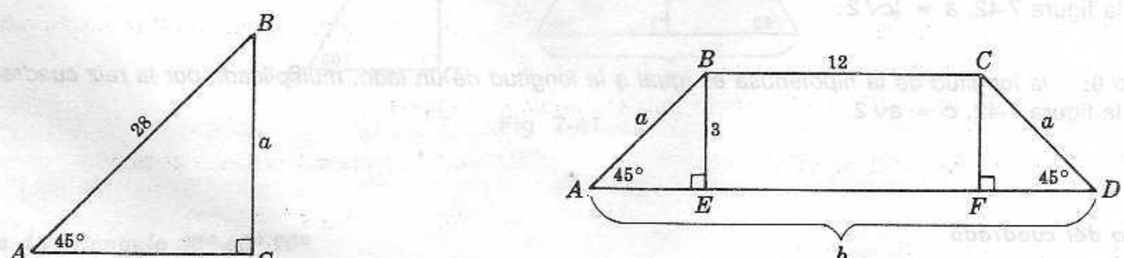
Soluciones

(*a*) Por el principio 1, $a = \frac{1}{2}(12) = 6$. Por el principio 2, $b = \frac{1}{2}(12)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

(*b*) Por el principio 2, $h = \frac{1}{2}(18)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$. Por el principio 1, $AE = FD = \frac{1}{2}(18) = 9$; por lo que $b = 9 + 10 + 9 = 28$.

7.40 Aplicación de los Principios 5 y 6

(*a*) Calcule la longitud del lado de un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa tiene longitud 28 [Fig. 7-44(*a*)].



(*a*) (*b*)

Fig. 7-44

(*b*) Un trapezoide isósceles tiene ángulos de la base que miden 45°. Si la base menor tiene longitud 12 y la altura tiene longitud 3, calcule las longitudes de la base mayor y de cada uno de sus lados [Fig. 7-44(*b*)].

Soluciones

(*a*) Por el principio 5, $a = \frac{1}{2}(28)\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$.

(*b*) Por el principio 6, $a = 3\sqrt{2}$. $AE = BE = 3$ y $EF = 12$; por lo que $b = 3 + 12 + 3 = 18$.

Problemas complementarios

1. Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (7.1)

(*a*) 20 centavos a 5 centavos
(*b*) 5 monedas de 10 centavos de dólar a 15 del mismo valor
(*c*) 30 libras a 25 libras
(*d*) 20° a 14°
(*e*) 27 min a 21 min
(*f*) 50% a 25%
(*g*) 15° a 75°
(*h*) 33% a 77%
(*i*) \$2.20 a \$3.30
(*j*) \$0.84 a \$0.96
(*k*) $\frac{1}{2}$ libra a $\frac{1}{4}$ libra
(*l*) $2\frac{1}{2}$ días a $3\frac{1}{2}$ días
(*m*) 5 pies a $\frac{1}{3}$ pie
(*n*) $\frac{1}{2}$ yarda a $1\frac{1}{2}$ yardas
(*o*) $16\frac{1}{2}$ m a $5\frac{1}{2}$ m

2. Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (7.2)

(*a*) 1 año a 2 meses
(*b*) 2 semanas a 5 días
(*c*) 3 días a 3 semanas
(*d*) $\frac{1}{2}$h a 20 min
(*e*) 2 yardas a 2 pies
(*f*) $2\frac{1}{3}$ yardas a 2 pies
(*g*) $1\frac{1}{2}$ pies a 9 pulgadas
(*h*) 2 g a 8 mg
(*i*) 100 lb a 1 ton
(*j*) \$2 a 25 centavos
(*k*) 2 monedas de 25 a 30 centavos
(*l*) 1 yarda cuadrada a 2 pies cuadrados

3. Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (7.3)

(*a*) 20 centavos a 30 centavos a \$1 dólar
(*b*) \$3 a \$1.50 a 25 centavos
(*c*) 1 moneda de 25 centavos a 1 moneda de 10 centavos a una moneda de 5 centavos
(*d*) 1 día a 4 días a 1 semana
(*e*) $\frac{1}{2}$ día a 9 h a 3 h
(*f*) 2 h a $\frac{1}{2}$ h a 15 min

(*g*) 1 ton a 200 lb a 40 lb (*h*) 3 lb a 1 lb a 8 oz (*i*) 1 gal a 1 qt a 1 pt

4. Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (7.4)

(*a*) 60 a 70
(*b*) 84 a 7
(*c*) 65 a 15
(*d*) 125 a 500
(*e*) 630 a 105
(*f*) 1 760 a 990
(*g*) 0.7 a 2.1
(*h*) 0.36 a 0.24
(*i*) 0.002 a 0.007
(*j*) 0.055 a 0.005
(*k*) 6.4 a 8
(*l*) 114 a 2.4
(*m*) $7\frac{1}{2}$ a $2\frac{1}{2}$
(*n*) $1\frac{1}{2}$ a 10
(*o*) $\frac{5}{8}$ a $1\frac{1}{2}$
(*p*) $\frac{7}{4}$ a $\frac{1}{8}$

5. Exprese cada una de las siguientes razones en términos menores: (7.4)

(*a*) x a $8x$
(*b*) $15c$ a 5
(*c*) $11d$ a 22
(*d*) 2π a πD
(*e*) πab a πa^2
(*f*) $4S$ a S^2
(*g*) S^3 a $6S^2$
(*h*) $9r^2$ a $6rt^2$
(*i*) x a $4x$ a $10x$
(*j*) $15y$ a $10y$ a $5y$
(*k*) x^3 a x^2 a x
(*l*) $12w$ a $10w$ a $8w$ a $2w$

6. Utilice x como factor común para representar los siguientes números y su suma: (7.4)

(*a*) Dos números cuya razón es 5:4
(*b*) Dos números cuya razón es 9 a 1.
(*c*) Tres números cuya razón es 2:5:11
(*d*) Cinco números cuya razón es 1:2:2:3:7

7. Si dos ángulos en la razón de 5:4 están representados por $5x$ y $4x$, exprese cada una de las siguientes proposiciones como una ecuación; después calcule x y los ángulos: (7.5)

(*a*) Los ángulos son adyacentes y forman en conjunto un ángulo que mide 45°.
(*b*) Los ángulos son complementarios.
(*c*) Los ángulos son suplementarios.
(*d*) Los ángulos son dos ángulos de un triángulo cuyo tercer ángulo es su diferencia.

8. Si tres ángulos en la razón 7:6:5 son representados por $7x$, $6x$ y $5x$, exprese cada una de las siguientes proposiciones como una ecuación, después calcule x y los ángulos: (7.6)

(*a*) El primero y el segundo son adyacentes y juntos forman un ángulo que mide 91°.

(*b*) El primero y el tercero son suplementarios.

(*c*) El primero y la mitad del segundo son complementarios.

(*d*) Los ángulos son los tres ángulos de un triángulo.

9. Resuelva las siguientes proporciones para x: (7.7)

(*a*) $x:6 = 8:3$ (*e*) $(x + 4):3 = 3:(x - 4)$

(*b*) $5:4 = 20:x$ (*f*) $(2x + 8):(x + 2) = (2x + 5):(x + 1)$

(*c*) $9:x = x:4$ (*g*) $a:b = c:x$

(*d*) $x:2 = 10:x$ (*h*) $x:2y = 18y:x$

10. Resuelva las siguientes proporciones para x: (7.7)

(*a*) $\frac{5}{7} = \frac{15}{x}$ (*e*) $\frac{x + 2}{5} = \frac{6}{3}$

(*b*) $\frac{7}{x} = \frac{3}{2}$ (*f*) $\frac{x - 1}{3} = \frac{5}{x + 1}$

(*c*) $\frac{3}{x} = \frac{x}{12}$ (*g*) $\frac{2x}{x + 7} = \frac{3}{5}$

(*d*) $\frac{x}{5} = \frac{15}{x}$ (*h*) $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$

11. Encuentre la cuarta proporcional entre cada uno de los siguientes conjuntos de números: (7.8)

(*a*) 1, 3, 5 (*c*) 2, 3, 4 (*e*) 3, 2, 5 (*g*) 2, 8, 8

(*b*) 8, 6, 4 (*d*) 3, 4, 2 (*f*) $\frac{1}{3}$, 2, 5 (*h*) b, $2a$, $3b$

12. Encuentre la media proporcional positiva entre cada una de las siguientes parejas de números: (7.9)

(*a*) 4 y 9 (*c*) $\frac{1}{3}$ y 27 (*e*) 2 y 5 (*g*) p y q

(*b*) 12 y 3 (*d*) $2b$ y $8b$ (*f*) 3 y 9 (*h*) a^2 y b

13. De cada una de las siguientes ecuaciones, forme una proporción cuyo cuarto término sea x: (7.10)
(*a*) $cx = bd$ (*b*) $pq = ax$ (*c*) $hx = a^2$ (*d*) $3x = 7$ (*e*) $x = ab/c$

14. En cada una de las siguientes ecuaciones, calcule la razón de x a y: (7.10)

(*a*) $2x = y$ (*b*) $3y = 4x$ (*c*) $x = \frac{1}{2}y$ (*d*) $ax = hy$ (*e*) $x = by$

15. ¿Cuál de las siguientes no es una proporción? (7.10)

(*a*) $\frac{4}{3} \stackrel{?}{=} \frac{24}{18}$ (*b*) $\frac{3}{5} \stackrel{?}{=} \frac{7}{12}$ (*c*) $\frac{25}{45} \stackrel{?}{=} \frac{10}{18}$ (*d*) $\frac{0.2}{0.3} \stackrel{?}{=} \frac{6}{9}$ (*e*) $\frac{x}{8} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$ cuando $x = 6$.

16. De cada una de las siguientes, forme una nueva proporción cuyo primer término sea x. Después calcule x. (7.11)

(*a*) $\frac{3}{2} = \frac{9}{x}$ (*b*) $\frac{1}{x} = \frac{5}{4}$ (*c*) $\frac{a}{x} = \frac{2}{b}$ (*d*) $\frac{x+5}{5} = \frac{11}{10}$ (*e*) $\frac{x-20}{20} = \frac{1}{4}$

17. Calcule x en cada uno de estos pares de proporciones:

(*a*) $a{:}b = c{:}x$ y $a{:}b = c{:}d$ (*c*) $2{:}3x = 4{:}5y$ y $2{:}15 = 4{:}5y$

(*b*) $5{:}7 = x{:}42$ y $5{:}7 = 35{:}42$ (*d*) $7{:}5x - 2 = 14{:}3y$ y $7{:}18 = 14{:}3y$

18. Calcule x en cada una de las siguientes proporciones: (7.12)

(*a*) $\frac{x-7}{8} = \frac{7}{4}$ (*b*) $\frac{x+y}{6} = \frac{x-y}{3} = \frac{1}{3}$ (*c*) $\frac{2x-y}{8} = \frac{y-1}{10} = \frac{1}{2}$

19. Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-45. (7.13)

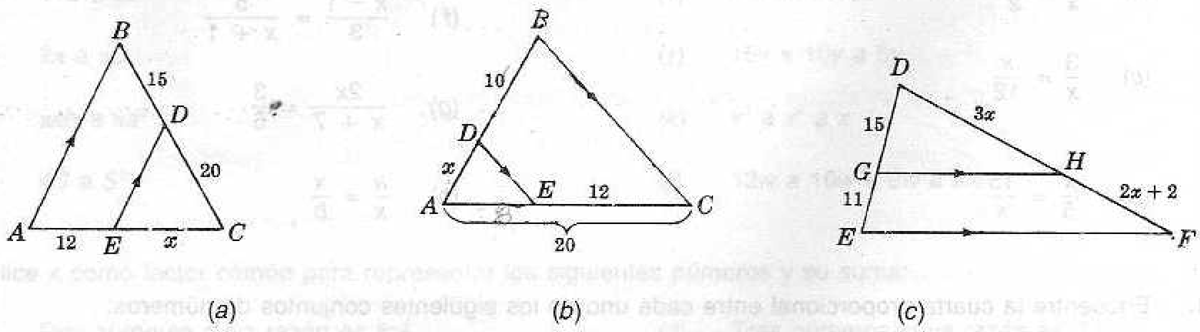


Fig. 7-45

20. ¿En qué secciones de la figura 7-46 es una línea paralela a un lado del triángulo?

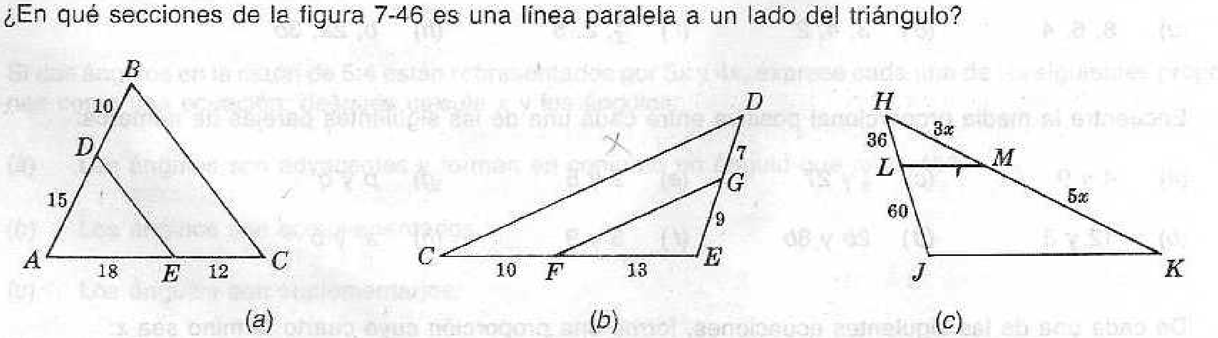


Fig. 7-46

21. Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-47. (7.14)

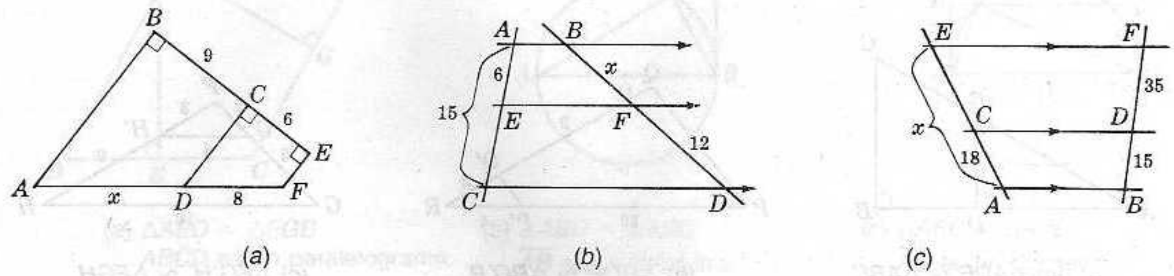


Fig. 7-47

22. Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-48. (7.15)

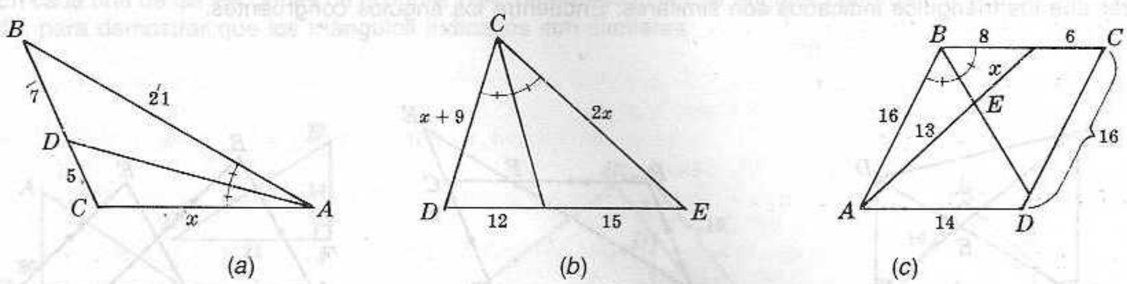


Fig. 7-48

23. Demuestre que tres o más paralelas dividen proporcionalmente a dos transversales. (7.16)

24. En los triángulos similares ABC y $A'B'C'$ de la figura 7-49, $\angle B$ y $\angle B'$ son ángulos correspondientes. Calcule $m\angle B$ si (a) $m\angle A' = 120°$ y $m\angle C' = 25°$; (b) $m\angle A' + m\angle C' = 127°$.

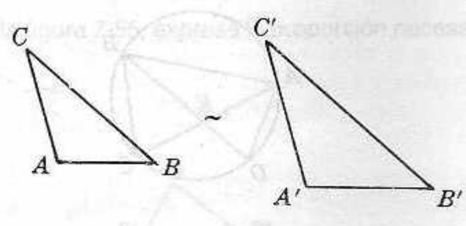


Fig. 7-49

25. En los triángulos similares ABC y $A'B'C'$ de la figura 7-50, $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$. (a) Calcule a si $c = 24$; (b) calcule b si $a = 20$; (c) calcule c si $b = 63$. (7.17)

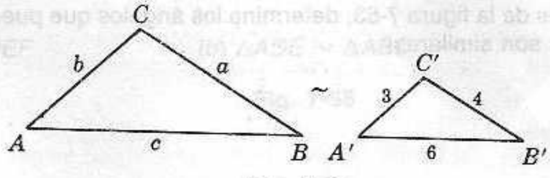
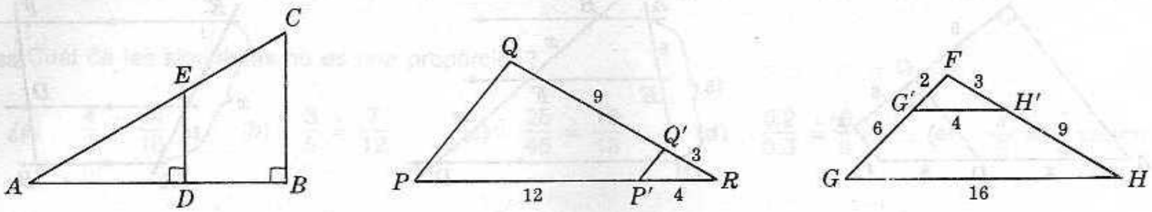


Fig. 7-50

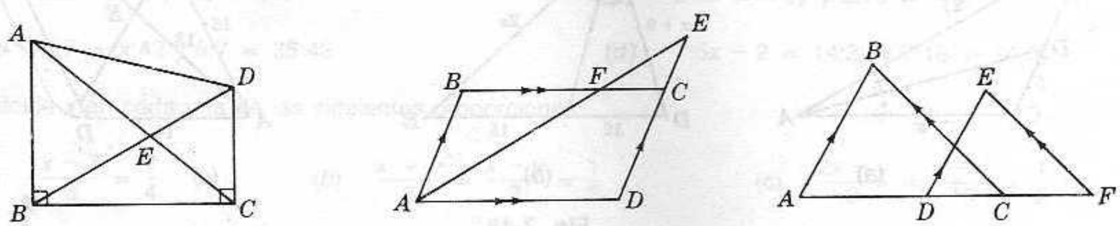
26. En cada una de las secciones de la figura 7-51, demuestre que los triángulos indicados son similares.



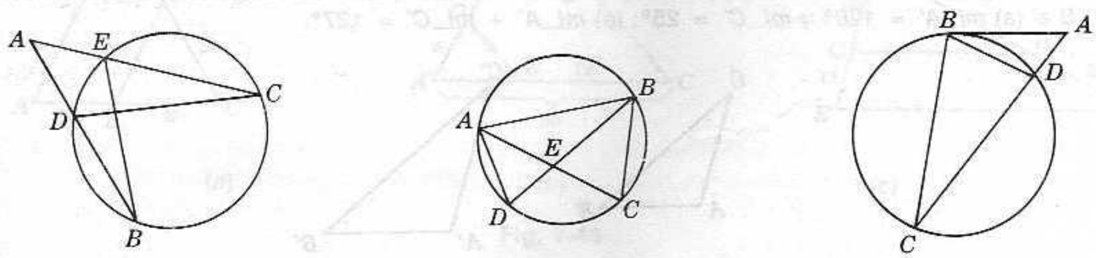
(*a*) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (*b*) $\triangle RQP \sim \triangle RQ'P'$ (*c*) $\triangle FG'H' \sim \triangle FGH$

Fig. 7-51

27. En cada una de las secciones de la figura 7-52, pueden utilizarse dos pares de ángulos congruentes para demostrar que los triángulos indicados son similares. Encuentre los ángulos congruentes. (7.18)



(*a*) $\triangle AEB \sim \triangle DEC$ (*b*) $\triangle BFA \sim \triangle AED$ (*c*) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

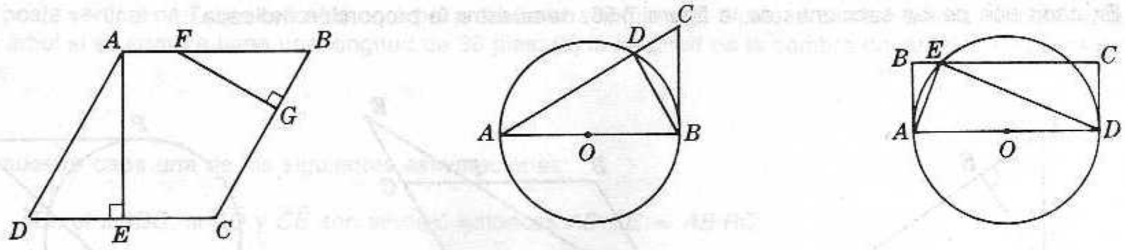


(*d*) $\triangle AEB \sim \triangle ADC$ (*e*) $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ (*f*) $\triangle ABC \sim \triangle ABD$

$\widehat{BC} \cong \widehat{CD}$

Fig. 7-52

28. En cada una de las secciones de la figura 7-53, determine los ángulos que pueden ser utilizados para demostrar que los triángulos indicados son similares. (7.19)



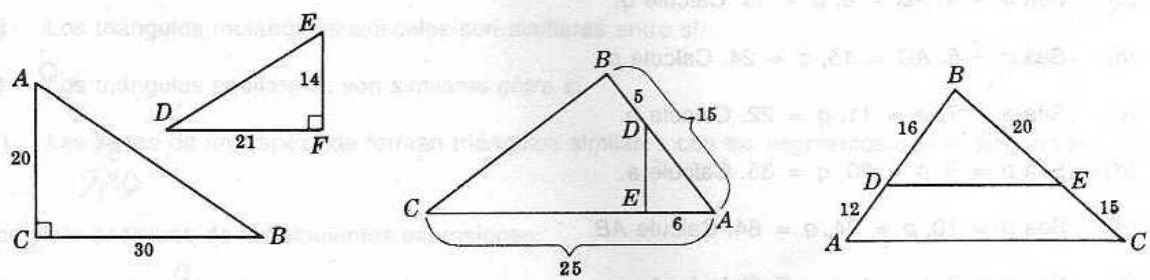
(a) $\triangle AED \sim \triangle FGB$
ABCD es un paralelogramo.

(b) $\triangle ABD \sim \triangle ABC$
$\overline{AB}$ es un diámetro.
$\overline{BC}$ es una tangente.

(c) $\triangle AEB \sim \triangle AED$
$\overline{AD}$ es un diámetro.
ABCD es un rectángulo

Fig. 7-53

29. En cada una de las secciones de la figura 7-54, determine el par de ángulos congruentes y la proporción necesaria, para demostrar que los triángulos indicados son similares. (7.20)



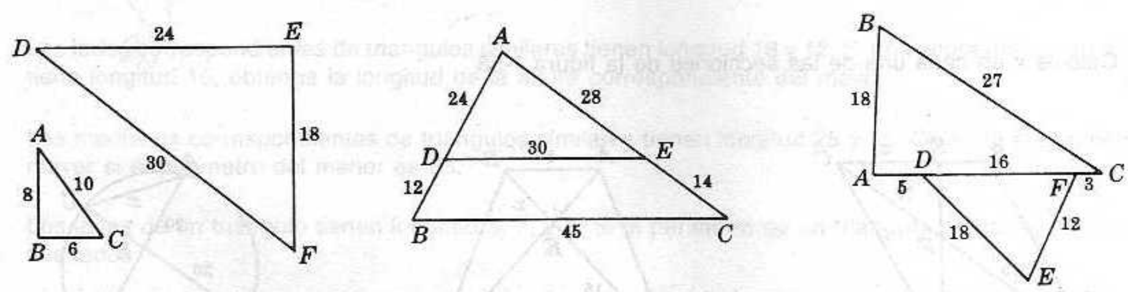
(a) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

(b) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

(c) $\triangle BDE \sim \triangle BAC$

Fig. 7-54

30. En cada una de las secciones de la figura 7-55, exprese la proporción necesaria para demostrar que los triángulos indicados son similares. (7.21)



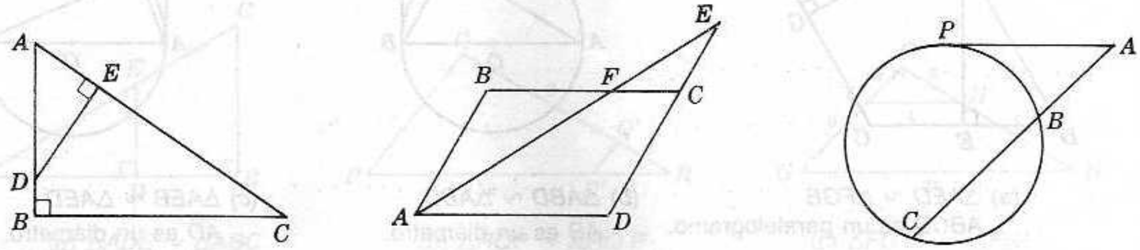
(a) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

(b) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

(c) $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

Fig. 7-55

31. En cada una de las secciones de la figura 7-56, demuestre la proporción indicada. (7.25)



(a) $AD:AC = DE:BC$

(b) $AB:EC = BF:FC$
$ABCD$ es un paralelogramo

(c) $AC:AP = AP:AB$
$\overrightarrow{AP}$ es una tangente

Fig. 7-56

32. En el $\triangle ABC$ (Fig. 7-57), $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. (7.22)

(a) Sea $a = 4$, $AB = 8$, $p = 10$. Calcule q.

(b) Sea $c = 5$, $AC = 15$, $q = 24$. Calcule p.

(c) Sea $a = 7$, $p = 11$, $q = 22$. Calcule b.

(d) Sea $b = 9$, $p = 20$, $q = 35$. Calcule a.

(e) Sea $a = 10$, $p = 24$, $q = 84$. Calcule AB.

(f) Sea $c = 3$, $p = 4$, $q = 7$. Calcule d.

$\frac{12.09}{2P} = 60$

$\frac{40}{20} = \frac{x}{30}$

$\frac{x}{40}$

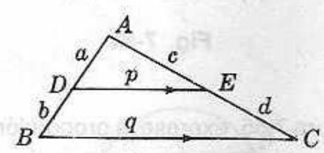
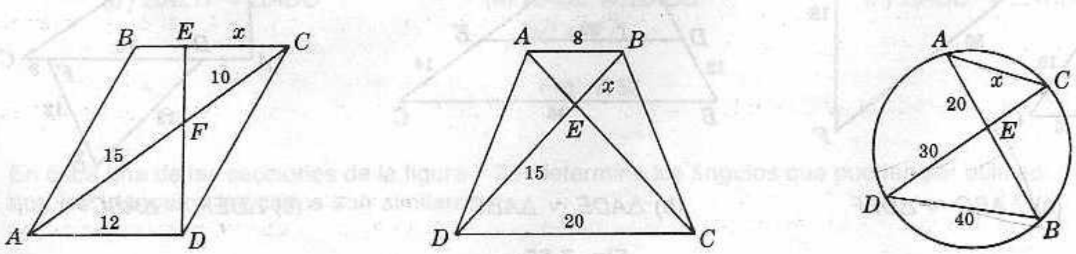


Fig. 7-57

33. Calcule x en cada una de las secciones de la figura 7-58 (7.22)



(a) $ABCD$ es un paralelogramo (b) $ABCD$ es un trapezoide (c)

Fig. 7-58

34. Un poste vertical de 7 pies cerca de un árbol produce una sombra de 6 pies. A la misma hora, calcule (*a*) la altura del árbol si su sombra tiene una longitud de 36 pies; (*b*) la longitud de la sombra del árbol si su altura es de 77 pies. (7.23)

35. Demuestre cada una de las siguientes aseveraciones: (7.25)

(*a*) En el $\triangle ABC$, si $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son alturas, entonces $AD{:}CE = AB{:}BC$.

(*b*) En el círculo O, el diámetro $\overline{AB}$ y la tangente $\overline{BC}$ son los lados del $\triangle ABC$. Si $\overline{AC}$ intersecta al círculo en D, entonces $AD{:}AB = AB{:}AC$.

(*c*) Las diagonales de un trapezoide se dividen entre sí en segmentos proporcionales.

(*d*) En el triángulo rectángulo ABC, $\overline{CD}$ es la altura sobre la hipotenusa $\overline{AB}$, entonces $AC{:}CD = AB{:}BC$.

36. Demuestre cada una de los siguientes aseveraciones: (7.24)

(*a*) Una línea paralela, a un lado de un triángulo, forma un triángulo similar al triángulo dado.

(*b*) Los triángulos rectángulos isósceles son similares entre sí.

(*c*) Los triángulos equiláteros son similares entre sí.

(*d*) Las bases de un trapezoide forman triángulos similares con los segmentos de las diagonales.

37. Complete cada una de las siguientes expresiones: (7.26)

(*a*) En triángulos similares, si los lados correspondientes están en la razón de 8:5, entonces las alturas correspondientes están en la razón de __?__.

(*b*) En triángulos similares, si las bisectrices correspondientes están en la razón de 3:5, entonces sus perímetros están en la razón de __?__.

(*c*) Si se dividen los lados de un triángulo a la mitad, entonces el perímetro es __?__, las bisectrices son __?__, las medianas son __?__, y los radios de los círculos circunscritos son __?__.

38. (*a*) Los lados correspondientes de triángulos similares tienen longitud 18 y 12. Si una altura del menor de ellos tiene longitud 10, obtenga la longitud de la altura correspondiente del mayor. (7.26)

(*b*) Las medianas correspondientes de triángulos similares tienen longitud 25 y 15. Obtenga el perimetro del mayor si el perímetro del menor es 36.

(*c*) Los lados de un triángulo tienen longitud 5, 7, y 8. Si el perímetro de un triángulo similar es 100, calcule sus lados.

(*d*) Las bases de un trapezoide tienen longitud 5 y 20, y la altura tiene longitud 12. Calcúlese la longitud de la altura de un triángulo formado por la base menor y la extensión, hasta que se intersecten de los lados no paralelos.

(*e*) Las bases de un trapezoide tienen longitud 11 y 22. Su altura tiene longitud 9. Calcule la distancia del punto de intersección de las diagonales a cada una de sus bases.

39. Complete cada una de las siguientes expresiones: (7.27)

(*a*) Si los lados correspondientes de dos polígonos similares están en la razón de 3:7, entonces la razón de sus alturas correspondientes es de ___?___.

(*b*) Si los perímetros de dos hexágonos similares están en la razón de 56 a 16, entonces la razón de sus diagonales correspondientes es de ___?___.

(*c*) Si se cuadriplica cada lado de un octágono y los ángulos permanecen iguales, entonces su perímetro es de ___?___.

(*d*) La base de un rectángulo es dos veces la de un rectángulo similar. Si el radio del círculo circunscrito al primer rectángulo es 14, entonces el radio del círculo circunscrito al segundo es de ___?___.

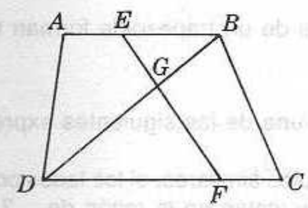
40. Demuestre cada uno de los siguientes enunciados:

(*a*) Las bisectrices correspondientes de dos triángulos están en la misma razón que un par de lados correspondientes.

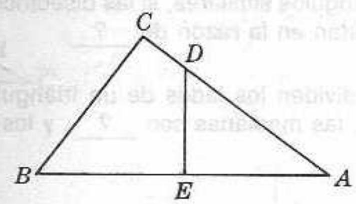
(*b*) Las medianas correspondientes de triángulos similares están en la misma razón que un par de lados correspondientes.

41. Demuestre lo solicitado en la figura 7-59. (7.28)

(*a*) **Dado:** Trapezoide *ABCD*
Demuéstrese:
$GB \times DF = GF \times EB$



(*b*) **Dado:** $\overline{BC} \perp \overline{AC}$
$\overline{DE} \perp \overline{AB}$
Demuéstrese:
$DE \times AC = BC \times AE$



(*c*) **Dado:** Diámetro $\overline{BC}$
$\overline{DE} \perp \overline{BC}$
Demuéstrese:
$(BD^2) = BE \times BC$

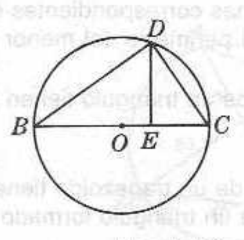
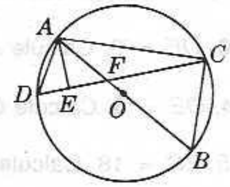
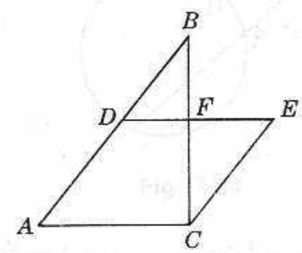


Fig. 7-59

(*d*) **Dado:** Círculo O
Diámetro AB
$\overline{AE} \perp \overline{CD}$
Demuéstrese:
$AD \times BC = AB \times DE$



(*e*) **Dado:** $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$
$\overline{AC} \perp \overline{BC}$
$\overline{DE} \perp \overline{BC}$
Demuéstrese:
$AB \times CF = BC \times EC$



(*f*) **Dado:** $\widehat{BC} \cong \widehat{CD}$
Demuéstrese:
$(BC^2) = AC \times EC$

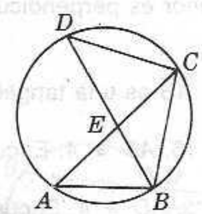


Fig. 7-59

42. Demuestre cada una de las siguientes aseveraciones: (7.28)

(*a*) Si dos cuerdas se intersectan en un círculo, el producto de la longitud de los segmentos de una cuerda es igual al producto de la longitud de los segmentos de la otra.

(*b*) En un triángulo rectángulo, el producto de la longitud de su hipotenusa y la altura sobre ésta es igual al producto de la longitud de sus lados.

(*c*) Si en el $\triangle$ inscrito ABC la bisectriz del $\angle A$ intersecta a $\overline{BC}$ en D y al círculo en E, entonces $BD \times AC = AD \times EC$.

43. En la figura 7-60: (7.29)

(*a*) Sea $AE = 10$, $EB = 6$, $CE = 12$. Calcule ED.

(*b*) Sea $AB = 15$, $EB = 8$, $ED = 4$. Calcule CE.

(*c*) Sea $AE = 6$, $ED = 4$, $CD = 13$. Calcule EB.

(*d*) Sea $ED = 5$, $EB = 2(AE)$, $CD = 15$. Calcule AE.

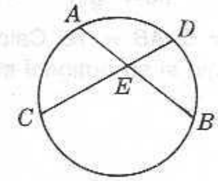


Fig. 7-60

43. En la figura 7-61, diámetro $\overline{CD} \perp$ cuerda $\overline{AB}$: (7.29)

(*e*) Sea $OD = 10$, $OE = 8$. Calcule AB.

(*f*) Sea $AB = 24$, $OE = 5$. Calcule OD.

(*g*) Sea $OD = 25$, $EC = 18$. Calcule AB.

(*h*) Sea $AB = 8$, $OD = 5$. Calcule EC.

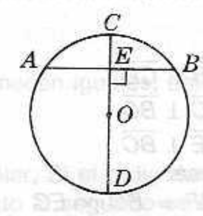


Fig. 7-61

44. Un punto está a 12 pulgadas del centro de un círculo cuyo radio es de 15 pulgadas. Calcule las longitudes de la cuerda menor y mayor que pueden ser trazadas a través de este punto. (*Sugerencia:* la cuerda mayor es un diámetro, y la menor es perpendicular a este diámetro). (7.29)

45. En la figura 7-62, $\overline{AB}$ es una tangente: (7.29)

(*a*) Sea $AC = 16$, $AD = 4$. Encuentre AB.

(*b*) Sea $CD = 5$, $AD = 4$. Encuentre AB.

(*c*) Sea $AB = 6$, $AD = 3$. Encuentre AC.

(*d*) Sea $AC = 20$, $AB = 10$. Encuentre AD.

(*e*) Sea $AB = 12$, $AD = 9$. Encuentre CD.

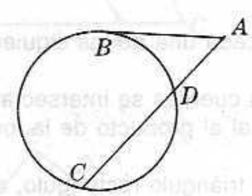


Fig. 7-62

En la figura 7-63, $\overline{CD}$ es un diámetro; $\overline{AB}$ es una tangente; (7.29)

(*f*) Sea $AD = 6$, $OD = 9$. Calcule AB.

(*g*) Sea $AD = 2$, $AB = 8$. Calcule CD.

(*h*) Sea $AD = 5$, $AB = 19$. Calcule OD.

(*i*) Sea $AB = 12$, $AC = 18$. Calcule OD.

(*j*) Sea $OD = 5$, $AB = 12$. Calcule AD.

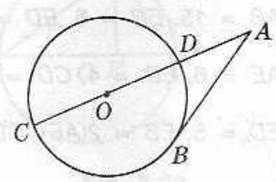


Fig. 7-63

46. En la figura 7-64: (7.31)

(a) Sea $AB = 14$, $AD = 4$, $AE = 7$. Calcule AC.

(b) Sea $AC = 8$, $AE = 6$, $AD = 3$. Calcule BD.

(c) Sea $BD = 5$, $AD = 7$, $AE = 4$. Calcule AC.

(d) Sea $AD = DB$, $EC = 14$, $AE = 4$. Calcule AD.

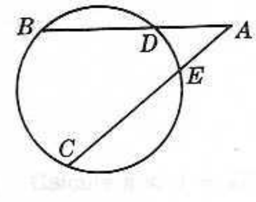


Fig. 7-64

En la figura 7-65, $\overline{CE}$ es un diámetro: (7.31)

(e) Sea $OC = 3$, $AE = 6$, $AD = 8$. Calcule AB.

(f) Sea $BD = 7$, $AD = 5$, $AE = 2$. Calcule OC.

(g) Sea $OC = 11$, $AB = 15$, $AD = 5$. Calcule AE.

(h) Sea $OC = 5$, $AE = 6$, $BD = 4$. Calcule AD.

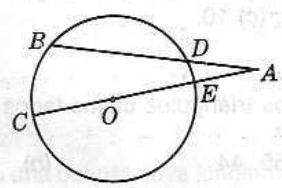


Fig. 7-65

47. $\overline{CD}$ es la altura sobre la hipotenusa $\overline{AB}$ en la figura 7-66. (7.32)

(a) Si $p = 2$ y $q = 6$, encuentre a y h.

(b) Si $p = 4$ y $a = 6$, encuentre c y h.

(c) Si $p = 16$ y $h = 8$, encuentre q y b.

(d) Si $b = 12$ y $q = 6$, encuentre p y h.

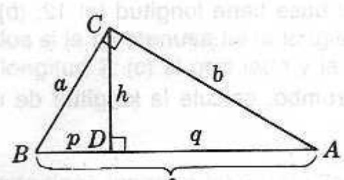


Fig. 7-66

48. En un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitud a y b, calcule la longitud de la hipotenusa c cuando: (7.33)

(a) $a = 15, b = 20$ (b) $a = 15, b = 36$ (c) $a = 5, b = 4$

(d) $a = 5, b = 5\sqrt{3}$ (e) $a = 7, b = 7$

49. En el triángulo rectángulo de la figura 7-67, calcule la longitud del lado faltante cuando: (7.33

(*a*) $a = 12, c = 20$ (*b*) $b = 6, c = 8$ (*c*) $b = 15, c = 17$

(*d*) $a = 2, c = 4$ (*e*) $a = 5\sqrt{2}, c = 10$ (*f*) $a = \sqrt{5}, c = 2\sqrt{2}$

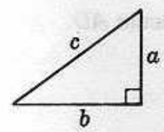


Fig. 7-67

50. Calcúlese la longitud de los lados de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud c, si estos lados estár en la razón de: (*a*) 3:4 y $c = 15$; (*b*) 5:12 y $c = 26$; (*c*) 8:15 y $c = 170$; (*d*) 1:2 y $c = 10$ (7.34

51. En un rectángulo, calcule la longitud de la diagonal si sus lados tienen longitudes (*a*) 9 y 40; (*b*) 5 y 10.(7.33

52. En un rectángulo, calcule la longitud de uno de sus lados si la diagonal tiene longitud 15 y el otro tiene longitud (*a*) 9; (*b*) 5; (*c*) 10. (7.33

53. De entre los triángulos cuyos lados tienen las longitudes como sigue, ¿cuáles son triángulos rectángulos?

(*a*) 33, 55, 44 (*b*) 120, 130, 50 (*c*) $4, 7\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}$ (*d*) 25, 7, 24

(*e*) 5 pulgadas, 1 pie, 1 pie 1 pulgada (*f*) 1 yarda, 1 yarda 1 pie, 1 yarda 2 pies

(*g*) 11 millas, 60 millas, 61 millas (*h*) 5 cm, 5 cm, 7 cm

54. ¿Es un triángulo rectángulo si sus lados están en la razón de (*a*) 3:4:5; (*b*) 2:3:4?

55. Calcule la longitud de la altura de un triángulo isósceles si cada uno de sus dos lados congruentes tiene longitud 10 y su base tiene longitud (*a*) 12; (*b*) 16; (*c*) 18; (*d*) 10. (7.35

56. En un rombo, calcule la longitud de un lado si las diagonales tienen longitudes (*a*) 18 y 24; (*b*) 4 y 8; (*c*) 6 y $6\sqrt{3}$. (7.36

57. En un rombo, calcule la longitud de una diagonal si un lado y la otra diagonal tienen longitudes, respectivamente (*a*) 10 y 12; (*b*) 17 y 16; (*c*) 4 y 4; (*d*) 10 y $10\sqrt{3}$. (7.36

58. En el trapezoide isósceles *ABCD* de la figura 7-68, (7.37

(*a*) Calcule a si $b = 32$, $b' = 20$ y $h = 8$. (*b*) Calcule h si $b = 24$, $b' = 14$ y $a = 13$.

(*c*) Calcule b si $a = 15$, $b' = 10$ y $h = 12$. (*d*) Calcule b' si $a = 6$, $b = 21$ y $h = 3\sqrt{3}$.

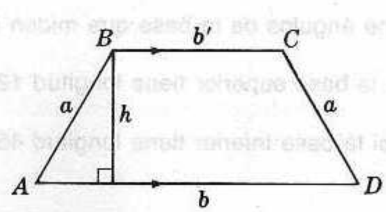


Fig. 7-68

59. En el trapezoide *ABCD* de la figura 7-69, (7.37)

(*a*) Calcule d si $a = 11$, $b = 3$ y $c = 15$. (*b*) Calcule a si $d = 20$, $b = 12$ y $c = 36$.

(*c*) Calcule d si $a = 5$, $p = 13$ y $c = 14$. (*d*) Calcule p si $a = 20$, $c = 28$ y $d = 17$

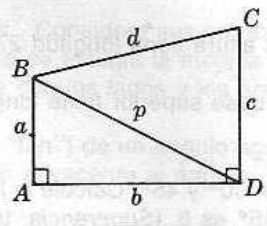


Fig. 7-69

60. El radio de un círculo es 15. Calcule (*a*) la distancia desde el centro a una cuerda cuya longitud es 18; (*b*) la longitud de una cuerda cuya distancia a su centro es 9. (7.38)

61. En un círculo, una cuerda cuya longitud es 16 está a una distancia de 6 de su centro. Calcule la longitud de una cuerda cuya distancia a su centro es de 8. (7.38)

62. Dos círculos tangentes tienen externamente radios de 25 y 9.
Calcule la longitud de una tangente común externa. (7.38)

63. En un triángulo 30°-60°-90°, calcule las longitudes de (*a*) los lados si la hipotenusa tiene longitud 20; (*b*) el otro lado y la hipotenusa, si el lado opuesto al ángulo de 30° tiene longitud 7; (*c*) el otro lado y la hipotenusa si el lado opuesto al ángulo de 60° tiene longitud $5\sqrt{3}$. (7.39)

64. En un triángulo equilátero, calcule la longitud de la altura si el lado tiene longitud (*a*) 22; (*b*) $2a$. Calcule el lado si la altura tiene longitud (*c*) $24\sqrt{3}$; (*d*) 24. (7.39)

65. En un rombo que tiene un ángulo que mide 60°, calcule las longitudes de (*a*) las diagonales si un lado tiene longitud 25; (*b*) el lado y la diagonal mayor si la diagonal menor tiene longitud 35. (7.39)

66. En un trapezoide isósceles que tiene ángulos de la base que miden 60°, determine las longitudes de: (7.39)

(*a*) La base inferior y la altura si la base superior tiene longitud 12 y los lados tienen longitud 16

(*b*) La base superior y la altura si la base inferior tiene longitud 45 y los lados tienen longitud 28

67. En un triángulo rectángulo isósceles, calcule la longitud de cada lado, si la hipotenusa tiene longitud (*a*) 34; (*b*) $2a$. Calcule la longitud de la hipotenusa si cada lado tiene longitud (*c*) 34; (*d*) $15\sqrt{2}$. (7.40)

68. En un cuadrado, calcule la longitud de (*a*) el lado si la diagonal tiene longitud 40; (*b*) la diagonal si el lado tiene longitud 40. (7.40)

69. En un trapezoide isósceles que tiene ángulos de la base que miden 45°, calcule las longitudes de: (7.40)

(*a*) La base inferior y cada lado si la altura tiene longitud 13 y la base superior tiene longitud 19

(*b*) La base superior y cada lado si la altura tiene longitud 27 y la base inferior tiene longitud 65

(*c*) Cada lado y la base inferior, si la base superior tiene longitud 25 y la altura tiene longitud 15

70. Un triángulo tiene dos ángulos que miden 30° y 45°. Calcule la longitud del lado opuesto al ángulo de 30° si la longitud del lado opuesto al ángulo de 45° es 8. (*Sugerencia:* trace la altura al tercer lado.) (7.39, 7.40)

71. Un paralelogramo tiene un ángulo que mide 45°. Calcule las distancias entre sus pares de lados opuestos, si sus lados tienen longitudes 10 y 12. (7.40)